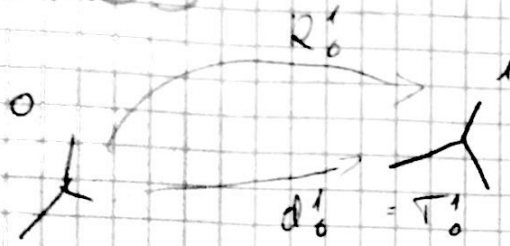


WYKŁAD 3

ROBOTYKA

[N]

17.10.2019.



$$R_0^2 = R_0^1 R_1^2$$

$$d_0^2 = d_0^1 + R_0^1 d_1^2$$

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} (3 \times 3) & (3 \times 1) \\ R_0^1 & T_0^1 \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix}$$

↓
[0, 0, 0]

$$p_0 = R_0^1 p_1 + T_0^1$$

(3x1)

$$p_1 \rightarrow P = \begin{bmatrix} p^x \\ 1 \end{bmatrix}$$

↓
kopiuje dane jednostkowe
"p"

Wniosek:

$$P_0 = A_0^1 P_1$$

$$\begin{bmatrix} p_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^1 & T_0^1 \\ \emptyset & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0^1 p_1 + T_0^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ogólnie:

$$P_0 = A_0^2 P_2 = A_0^1 A_1^2 P_2$$

$$A_0^n = A_0^1 \dots A_{n-2}^{n-1} A_{n-1}^n$$

$$\begin{aligned}
 A_0^3 &= A_0^1 A_1^2 = \begin{bmatrix} R_0^1 & T_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^2 & T_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} R_0^1 R_1^2 & R_0^1 T_1^2 + T_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} R_0^2 & T_0^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R \in SO(3) \\ T \in \mathbb{R}^3 \end{matrix}$$

$$A \in SE(3)$$

↓
special euclidean group
(jest grupa to dzialanie)

⇓
w tym przypadku
musimy uwazac

$I_4 \rightarrow$ element neutralny

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim \mathbb{R}^3 \rightarrow T$$

$$\dim SE(3) = 6 = 3 + 3$$

(3-rotacje grupy)

$$\downarrow \dim SO(3) \rightarrow R$$

$$Rot(x, \alpha) = \begin{bmatrix} \overset{(3 \times 3)}{rot(x, \alpha)} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rot}(y, \beta)$$

$$\text{Rot}(z, \gamma)$$

Translacja:

$$\text{Trans}(x, a) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & \begin{matrix} a \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

we pierwszą kolumnę
bo 'x' nie ma

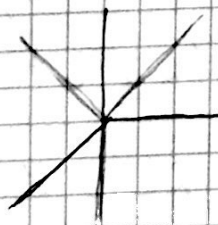
$$\text{Trans}(y, b) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & \begin{matrix} 0 \\ b \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prostokąt
i ogólnie

$$\text{Trans}(z, c)$$

KONIEC
'POKOZENIE'

PREDKĄŚĆ



1
0
0

Mnożenia
nie można
zredukować
bo to macierze!

$$R(t)$$

$$R(t) R^T(t) = R^T(t) R(t) = \mathbb{I}_3$$

$$\dot{R} R^T + R \dot{R}^T = \dot{R}^T R + R^T \dot{R} = 0$$

$$\Omega_s = \dot{R} R^T$$

$$R^T \dot{R} = \Omega_b$$

prędkość kątowa
w przestrzeni
(s) → space

prędkość
kątowa
w układzie
ciała (b) → body

$$\Omega_s^T = R \dot{R}^T$$

$$\Omega_s + \Omega_s^T = 0$$

$$\rightarrow \Omega_s = -\Omega_s^T$$

Macierz antysymetryczna
(na diagonalu 0)

$$\Omega_s = [\omega_s] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Omega_b \rightarrow$ też jest antysymetryczna (analogiczny doświadczenie)

$$[\omega_s] = \Omega_s = \dot{R} R^T \rightarrow \dot{R} = \Omega_s R$$

$$[\omega_b] = \Omega_b = R^T \dot{R} \rightarrow \dot{R} = R \Omega_b$$

$$\Omega_s R = R \Omega_b \quad / \quad R^T \text{ (przez)}$$

$$\Omega_s = R \Omega_b R^T$$

$$[\omega_s] = R [\omega_b] R^T$$

$$[\omega_s] v = R [\omega_b] R^T v$$

$$= R (\omega_b \times (R^T v))$$

$$= (R \omega_b) \times (R R^T v)$$

$$\Rightarrow [\omega_s] v = R \omega_b \times v$$

$$[\omega_s] v = [R \omega_b] v$$

$$\omega_s = R \omega_b$$

Przykład:

$$\Omega v = \omega \times v$$

$$R(a \times b) = (R a) \times (R b)$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} R(t) & T(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↓
premiśnienie

$$\hookrightarrow SO(3)$$

$$R^{-1} = R^T$$

$$V_S = \dot{C}(t) C^{-1}(t)$$

↓ przedkłada macierz
 $\hookrightarrow SE(3)$

$$V_B = C^{-1}(t) \dot{C}$$

$$V_S = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T & -R^T T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \dot{R} R^T & -\dot{R} R^T T + \dot{T} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} [\omega_S] & -[\omega_S]T + \dot{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

= *

$$-[\omega_S]T = -(\omega_S \times T) = T \times \omega_S = [T] \omega_S$$

$$* \begin{bmatrix} [\omega_S] & [T] \omega_S + \dot{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_S \rightarrow 4 \times 4$$

$$V_B \rightarrow 6 \times 6$$

↓ okręta
~ ułożenie
przestrzeni

$$V_S = \begin{bmatrix} [T] \omega_S + \dot{T} \\ \omega_S \end{bmatrix} 6 \times 6$$

Obrotu żyje ze własnej przestrzeni, translacje już nie!

$$V_b = C^{-1}(t) \dot{C} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \dot{T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{R} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_b = \begin{bmatrix} R^T \dot{R} & R^T \dot{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\omega_b] & R^T \dot{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_b = \begin{bmatrix} R^T \dot{T} \\ \omega_b \end{bmatrix}_{6 \times 1} \rightarrow \text{skupina 6 vlnových čísel}$$

ZÁLEŽNOSŤ SKUPINY KUK

$$V_s = \begin{matrix} 3 \times 3 \\ \boxed{} \\ 6 \times 6 \end{matrix} V_b \quad 6 \times 1$$

$$\begin{bmatrix} [T] \omega_s + \dot{T} \\ \omega_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{a}{R} & \overset{b}{[T]R} \\ 0_{3 \times 3} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T \dot{T} \\ \omega_b \end{bmatrix}$$

$\omega_s \omega_b = R \omega_b$

bo:

$$\rightarrow [T] R \omega_b + \dot{T}$$

$$\rightarrow a R^T \dot{T} + b \omega_b = [T] R \omega_b + \dot{T}$$