ROBOTYKA (1)

[N] 19. 12. 2019 r.

WYKŁAD 11

Kołowe roboty mobilne:

ograniczenia w formie Pfaffa:

$$A(q)\dot{q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{q} = G(q)u = \sum_{i=1}^{m} g_i(q)u_i$$

$m = n - r$

$\underset{r\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{G} = \underset{r\times 1}{0}$

$\Downarrow \quad [\,,\,]$

dystrybucje

$G = [g_1, \dots, g_m]$

$$\begin{cases} D_0 = \operatorname{span}_{C^\infty} \{g_1 \dots g_m\} \\ D_1 \\ \vdots \\ D_{i+1} = D_i \oplus [D_0, D_i] \end{cases}$$

Wektor wzrostu:

$r_0(q) = \operatorname{rank} D_0(q)$

$r_1(q) = \operatorname{rank} D_1(q)$ $\qquad r_0(q) \leq r_1(q) \leq \dots$

$\vdots$

$\underset{p}{\exists}\ \operatorname{rank} D_p(q) = n$ *

układ sterowalny <=> układ nieholonomiczny

Ograniczenia, które są zadane w momencie gdy układ jest nieholonomiczny nazywamy ograniczeniami nieholonomicznymi.

* Jeżeli warunek nie jest spełniony to układ jest holonomiczny

Układ holonomiczny - przestrzeń jest wielowymiarowa ale poruszać się można tylko po podprzestrzeni

Układy nieholonomiczne pojawiają się w robotach szybujących (free floating). Ograniczenia nieholonomiczne wynikają z prawa zachowania momentu pędu.

Ograniczenia holonomiczne - z prawa zachowania pędu.

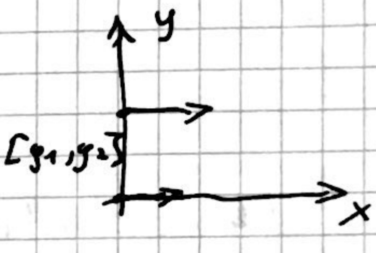
Jak znaleźć (dobrać sterowania):

-> założony układ nieholonomiczny:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta \\ s_\theta \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} s_\theta \\ -c_\theta \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(0,0,0)^T \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



mały czas t

$t\,[g_1, g_2]$ ← do generacji tego

układamy szeregowo →

$\sqrt{t}\, g_1$

↓

$\sqrt{t}\, g_2$

↓

$\sqrt{t}\, (-g_1)$

↓

$\sqrt{t}\, (-g_2)$

Ruch w kierunku pól wektorowych wyższych stopni jest trudniejszy.

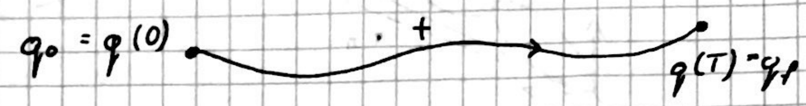
DYNAMIKA (manipulatorów)

Kinematyka zajmowała się położeniem
w dynamice pojęcia się siły, momenty oraz przyspieszenia

1) Definiujemy funkcję Lagrange'a $L(q,\dot{q}) = \underbrace{K(q,\dot{q})}_{\text{energia kinetyczna}} - \underbrace{V(q)}_{\text{energia potencjalna}}$

2) Definiujemy działanie

$$S(q(\cdot)) = \int_0^T L(q,\dot{q})\,dt$$



3) Stosujemy zasadę najmniejszego działania:

ZAŁOŻENIA
- → $\delta q(0) = \delta q(T) = 0$
- → brak wymuszeń zewnętrznych
- → brak efektów dyssypatywnych (założenia oporu)
- → wariacje (S) są małe

(delta) $\underbrace{\delta}_{\text{wariacja}} S = 0$

$$\delta S = S(q+\delta q) - S(q) =$$

$$= \int_0^T L\,|q + \delta q\,\dot{q} + \delta\dot{q}|\,dt - \int_0^T L(q,\dot{q})\,dt =$$

$$= \int_0^T \Big(L(q,\dot{q}) + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \theta^2(\delta q,\delta\dot{q})$$

$$- L(q,\dot{q})\,dt\Big) =* \int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\,dt = \int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,d(\delta q) =$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_0^T - \int_0^T \delta q\, d\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big) = -\int_0^T \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\,(dt) =$$

$$* = \int_0^T \Big(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big)\,dt =$$

(użyte było całkowanie przez części; $du = v\,dt$)

$$= \int_0^T \underbrace{\Big(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big)}_{=0} \underbrace{\delta q}_{\text{dowolne}}\,dt = 0$$

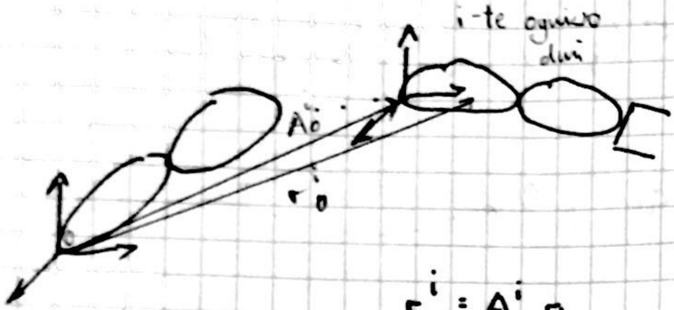
Scanned with CamScanner

4) Równanie Eulera - Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \; (u)$$

w realnych przypadkach zamiast 0 będą sterowania

$$\langle x, y \rangle = x^T y = tr(x y^T)$$



$$r_0^i = A_0^i r_i$$

$$dK_i = \frac{1}{2} dm_i \langle \dot r_0^i, \dot r_0^i \rangle = \frac{1}{2} dm_i \, tr\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_0^i}{\partial q_j} \dot q_j r_i \sum_{k=1}^{n} r_i^T \left(\frac{\partial A_0^i}{\partial q_k}\right)^T \dot q_k \right)$$

$$K_i = \frac{1}{2} \int_{m_i} tr\left(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial A_0^i}{\partial q_j} r_i r_i^T \left(\frac{\partial A_0^i}{\partial q_k} \right)^T \dot q_j \dot q_k \right) dm_i =$$

$$= \frac{1}{2} tr\left(\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial A_0^i}{\partial q_j} \int_{m_i} r_i r_i^T dm_i \left(\frac{\partial A_0^i}{\partial q_k} \right)^T \dot q_j \dot q_k \right)$$

J_i - macierz pseudo-inercji ogniwa i-tego

$$J_i = \int_{m_i} r_i r_i^T dm_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm & \int x_i y_i \, dm & \int x_i z_i \, dm & \int x_i dm \\ * & \int y_i^2 dm & \int y_i z_i \, dm & \int y_i dm \\ * & * & \int z_i^2 dm & \int z_i dm \\ * & * & * & m_i \end{bmatrix}$$

$$r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Z macierzy pseudoinercji można odczytać masę ogniwa i środek masy