ROBOTYKA (1)

[W] 12. 12. 2019 r.

WYKŁAD 10

Poprzedni wykład:

- kołowe roboty mobilne
- brak poślizgu (wzdłużnego, poprzecznego)

q - konfiguracja

Po uwzględnieniu poślizgów:

$$\underset{r \times n}{A(q)}\dot{q} = 0$$ ograniczenia w formie Pfaffa

$\dim q = n$

$r \to$ liczba ograniczeń

$$\forall_q \ \operatorname{rank} A(q) = r$$

$$\boxed{m = n - r}$$

$$\dot{q} = G(q)u = \sum_{i=1}^{m} g_i(q) u_i \quad **$$

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}}_{g_1(q)} u_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g_2(q)} u_2 \quad *$$

Czy układem da się sterować?

Sterowalność - zdolność ruchu.

własność, która mówi o tym, że istnieją dopuszczalne sterowania, które doprowadzą nas do pożądanego punktu.

Scanned with CamScanner

u_1, u_2 - dwa sterowania

$$m = n - r$$

liczba sterowań — wymiar przestrzeni konfiguracyjnej

$$n > m$$

* BEZDRYFOWY UKŁAD STEROWANIA
oznacza, że w momencie gdy sterowania u_i są równe 0 to ruch nie występuje

pola wektorowe
$g_1, \dots, g_m$ -> generatory

DODATKOWE POLE GENERUJEMY !

C, B -> pola wektorowe

$\underset{n\times 1}{[C,B]}$ - pole wektorowe

nawias Liego

$$[C,B] = \underbrace{\underset{n\times n}{\frac{\partial B}{\partial q}} \underset{n\times 1}{C} - \frac{\partial C}{\partial q} B}_{n\times 1}$$

$\dim q = n$

$\Rightarrow$ $[C,B] = -[B,C]$ - asymetria

nawias Liego - operacja szersza od iloczynu wektorowego

(Jeżeli któryś z elementów jest zerowym polem wektorowym to otrzymamy zerowe pole wektorowe)

$$\Rightarrow \quad [kC, B] = k[C, B]$$

$$[C, kB] = k[C, B]$$

k ∈ stała

} operacja dwuliniowa

Tożsamość Jacobiego

A, B, C

$$[A,[B,C]] + [C,[A,B]] + [B,[C,A]] = 0$$

Dystrybucja:

$$D_0 = \underset{C^\infty}{\mathrm{span}} \{g_1, g_2\}$$

dystrybucja z generatorów

$$D_0: \ \boxed{g_1, g_2}$$

C^∞ - funkcja jest ciągła i jej wszystkie pochodne również

C^0 - funkcja ciągła

C^1 - funkcja ciągła, z pochodną pierwszego stopnia ciągłą

$$D_{i+1} = D_i \oplus [D_0, D_i]$$

Nawias Liego dystrybucji - każde pole z jednej dystrybucji krzyżujemy z polem z kolejnej

$$D_1 = D_0 \oplus [D_0, D_0]$$

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{g_1, g_2}}_{D_0} \qquad \boxed{[g_1, g_2]}}^{D_1}$$

$$[g_1, g_2] = \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial q} g_2 =$$

$$= \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}} g_1 - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

RZĄD DYSTRYBUCJI (w punkcie) (liczba niezależnych pól)

$$\text{rank } D_0 \to \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rząd maksymalnie 2

W każdej konfiguracji rząd wynosi 2, $r_0 = 2$
(bo jeśli $\sin\theta = 0$ to $\cos\theta \neq 0$)

$$\text{rank } D_1 \Rightarrow \begin{array}{ccc} \left[\begin{matrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{matrix}\right] \\ g_1 & g_2 & [g_1, g_2] \end{array} \to \det = +1$$

rząd maks 3

$r_1 = 3$

(nieholonomiczny)

Układ (**) jest sterowalny, gdy

$$\forall_q \exists_k \text{ rank } D_k = n$$

(dla każdej konfiguracji istnieje taki indeks k, że rząd dystrybucji wynosi n - ruch może odbywać się w każdym kierunku)

Ciąg dystrybucji: $D_0, D_1, D_2, \ldots$ → wieża flaga dystrybucji.

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ r_0(q) & r_1(q) & r_2(q) \end{matrix}$$

W konfiguracji q $(r_0(q), r_1(q) \ldots)$ nazywamy wektorem wzrostu w punkcie q.

Jeśli wektor wzrostu nie zależy od q (jest stały) to nazywamy go wektorem wzrostu.

Scanned with CamScanner

nlatka

STOPIEŃ NIEHOLONOMICZNOŚCI (w punkcie)

$r_0 = 2$

$(2,3)$ $n = 3$

$r_1 = 3$

Stopień wynosi 1 (bo osiągnęliśmy n dla r_1)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

$$[g_1, g_2] = 0$$

$r = 2$ Układ nieosiągalny (holonomiczny)

Układ holonomiczny, to układ nie-nieholonomiczny

↓ może się poruszać ale nie dowolnie – więzy holonomiczne (np. ściany)

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Ograniczenie

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0$$

$$[x \ y \ z] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = 0 = A(q)\dot{q}$$

Układ jest holonomiczny, gdy istnieje $\Phi(x, y, z)$, że

$$\frac{d\Phi}{dt} = M(q) A(q) \dot{q}$$, gdzie $M(q)$ nieosobliwa

Ze względu na to że ~~A(q)~~ $A(q)\dot{q} = 0$ to $\Phi(x, y, z)$ - const.

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \Rightarrow R^2$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

Układ rusza się tylko po sferze o promieniu R