#00

Sterowanie procesami ciągłymi

dr inż. Grzegorz Mzyk

Plan wykładu

1. Opis układów wielowymiarowych za pomocą macierzy transmitancji
2. Opis dynamiki układu metodą zmiennych stanu
3. Sterowalność i obserwowalność układów liniowych
4. Wyznaczanie odpowiedzi układu opisanego równaniami stanu
5. Sterowanie optymalne
6. Sprzężenie zwrotne od stanu
7. Przesuwanie biegunów, obserwatory stanu
8. Dyskretne układy regulacji procesami ciągłymi
9. Struktury z regulatorem PID
10. Zasady regulacji predykcyjnej – przykłady
11. Warstwowe struktury układów sterowania – realizacje przemysłowe

Literatura

[**1**] Amborski K., Marusak A., *Teoria sterowania w ćwiczeniach*, PWN, Warszawa, 1978.

[**2**] Findeisen W., *Wielopoziomowe układy sterowania*, PWN, Warszawa, 1974.

[**3**] Greblicki W., *Podstawy automatyki*, Ofic. Wyd. Pol. Wroc., 2006.

[**4**] Kaczorek T., *Teoria wielowymiarowych układów dynamicznych liniowych*, WNT, Warszawa, 1983.

[**5**] Kaczorek T., *Teoria sterowania i systemów*, T. 1, PWN, Warszawa, 1999.

[**6**] Kulikowski R., *Sterowanie w wielkich systemach*, WNT, Warszawa, 1970.

[**7**] Łysakowska B., Mzyk G., *Komputerowa symulacja układów automatycznej regulacji w środowisku Matlab/Simulink*, Ofic. Wyd. Pol. Wroc., 2005.

[**8**] Ogata K., *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*;WNT,Warszawa, 1974.

[9] Pełczewski W., *Teoria sterowania. Ciągłe stacjonarne układy liniowe*, WNT, Warszawa, 1980.

[10] Tatjewski P., *Sterowanie zaawansowane obiektów przemysłowych*, Wyd. Exit, Warszawa, 2002.

[11] Zalewski A., Cegieła R., *Matlab – obliczenia numeryczne i ich zastosowania*, Wyd. Nakom, Poznań, 1997.

#01
Opis układów wielowymiarowych za pomocą macierzy transmitancji
#02
Opis dynamiki układu metodą zmiennych stanu

Metody opisu liniowego układu dynamicznego z czasem ciągłym

- liniowe **równanie różniczkowe** rzędu m, (zakładamy że: $a_m \neq 0$, $l \leqslant m$, dodatkowo $u(t) = 0$ dla $t < 0$)

$$a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}} + ... + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_l \frac{d^l u(t)}{dt^l} + b_{l-1} \frac{d^{l-1} u(t)}{dt^{l-1}} + ... + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

z warunkiem początkowym (razem m liczb)

$$y(0-), \qquad \frac{dy(t)}{dt}/_{t=(0-)}, \qquad \cdots \qquad , \qquad \frac{d^{m-1} y(t)}{dt^{m-1}}/_{t=(0-)}$$

Przykład równania rzędu $m = 1$ i odp. warunku początkowego

$$3y'(t) + 2y(t) = 7u(t), \qquad\qquad y(0-) = 10$$

- charakterystyka impulsowa $k(t)$ (tzw. **odpowiedź impulsowa**), czyli postać $y(t)$ przy $u(t) = \delta(t)$ i zerowym WP
Przykład odpowiedzi skokowej

$$k(t) = e^{-t}$$

Uwaga. Gdy WP rzeczywiście jest zerowy, wtedy sygnał wyjściowy jest splotem wejścia i charakterystyki impulsowej

$$y(t) = u(t) * k(t) = \int_0^{\infty} u(t-\tau)k(\tau)d\tau$$

Gdy tak nie jest, dochodzi składowa zależna od WP.

- charakterystyka skokowa $\lambda(t)$ (tzw. **odpowiedź skokowa**), czyli postać $y(t)$ przy $u(t) = \mathbf{1}(t)$ i zerowym WP
Przykład odpowiedzi skokowej

$$\lambda(t) = 3t$$

- **transmitancja**

$$K(s) = \mathcal{L}\{k(t)\} = \int_0^\infty k(t)e^{-st}dt = \frac{b_l s^l + ... + b_1 s + b_0}{a_m s^m + ... + a_1 s + a_0}$$

Uwaga. Gdy warunek początkowy jest zerowy, wtedy $Y(s) = K(s)U(s)$ (tylko wtedy!!!).

- **równanie stanu**

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$u(t)$, $y(t)$ – wejscie i wyjście obiektu (skalarne)
$\mathbf{x}(t)$ – wektor stanu (kolumna, k elementów zmieniających się w czasie)
$\mathbf{A}$ – macierz parametrów, kwadratowa $k \times k$
$\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – wektory parametrów (kolumny k-elementowe)

Uwaga. $K(s) = \mathbf{c}^T(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$

Układy wielowymiarowe (MIMO)

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_p(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_q(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{'}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

$\mathbf{A}$ – macierz o wymiarach $r \times r$

$\mathbf{B}$ – macierz o wymiarach $r \times p$

$\mathbf{C}$ – macierz o wymiarach $q \times r$

Macierz transmitancji

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

$\mathbf{K}(s)$ – macierz o wymiarach $q \times p$

$$\mathbf{K}(s) = \begin{bmatrix} K_{1,1}(s) & K_{1,2}(s) & ... & K_{1,p}(s) \\ K_{2,1}(s) & K_{2,2}(s) & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ K_{q,1}(s) & ... & ... & K_{q,p}(s) \end{bmatrix}.$$

Przy zerowych WP

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{U}(s); \qquad Y_i(s) = \sum_{j=1}^{p} K_{i,j}(s)U_j(s); \qquad i = 1, 2, ..., q,$$

gdzie

$$\mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ ... \\ U_p(s) \end{bmatrix} \text{ oraz } \mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ ... \\ Y_q(s) \end{bmatrix}$$

$K_{i,j}(s)$ – transmitancja, określającą wpływ j-tego wejścia układu na i-te wyjście

#03
Sterowalność i obserwowalność układów liniowych

Sterowalność

Definicja. *Układ nazywamy* ***sterowalnym****, jeżeli istnieje* t^* *takie, że dla każdej pary stanów* $(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^*)$ *istnieje sterowanie* $u(t)$ *przeprowadzające ten układ ze stanu początkowego* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ *do stanu końcowego* $\mathbf{x}(t^*) = \mathbf{x}^*$*.*

Twierdzenie. *Układ jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz*

$$\mathbf{S} = [\mathbf{b},\ \mathbf{A}\mathbf{b},\ \mathbf{A}^2\mathbf{b},\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}]$$

jest pełnego rzędu, tj. gdy $\mathrm{rank}\mathbf{S} = k$*.*

Obserwowalność

Definicja. *Układ nazywamy* ***obserwowalnym****, jeżeli przy dowolnym sterowaniu $u(t)$ istnieje skończona chwila t_k, po której, na podstawie sygnałów $u(t)$ i $y(t)$ w przedziale czasu od t_0 do t_k, można wyznaczyć stan układu $x(t_0)$ w dowolnej chwili początkowej t_0.*

Twierdzenie. *Układ jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz*

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix}$$

jest pełnego rzędu, tj. gdy $\mathrm{rank}\mathbf{Q} = k$.

Macierze podobne

Definicja. *Macierze* $\mathbf{A}$ *i* $\mathbf{B}$ *nazywamy* ***podobnymi****, jeżeli istnieje taka macierz* $\mathbf{T}$*, że*

$$\mathbf{B} = \mathbf{TAT}^{-1}$$

Własność. *Macierze podobne mają takie same:*
– wielomiany charakterystyczne
– wartości własne
– wektory własne
– wyznaczniki
– ślady

Opisy równoważne

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad \text{– opisuje go trójka } (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T) \qquad (1)$$

$\mathbf{x}(t)$ – wektor stanu

Podstawmy $\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{x}$

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(t) = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}(t) + \mathbf{T}\mathbf{b}u(t) \\ y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}(t) \end{cases} \quad \begin{array}{c}\text{– ten sam system opisuje} \\ \text{trójka } (\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}, \mathbf{T}\mathbf{b}, \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1})\end{array} \qquad (2)$$

$\mathbf{v}(t)$ – wektor stanu

Definicja. *Opisy* (1) *i* (2) *nazywamy* ***równoważnymi.***

Postacie kanoniczne

Twierdzenie. *Każdy system sterowalny ma opis równoważny, w którym*

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{a}^T & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{Tb} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ – współczynniki wiel. charakterystycznego macierzy $\mathbf{A}$

Postacie kanoniczne (c.d.)

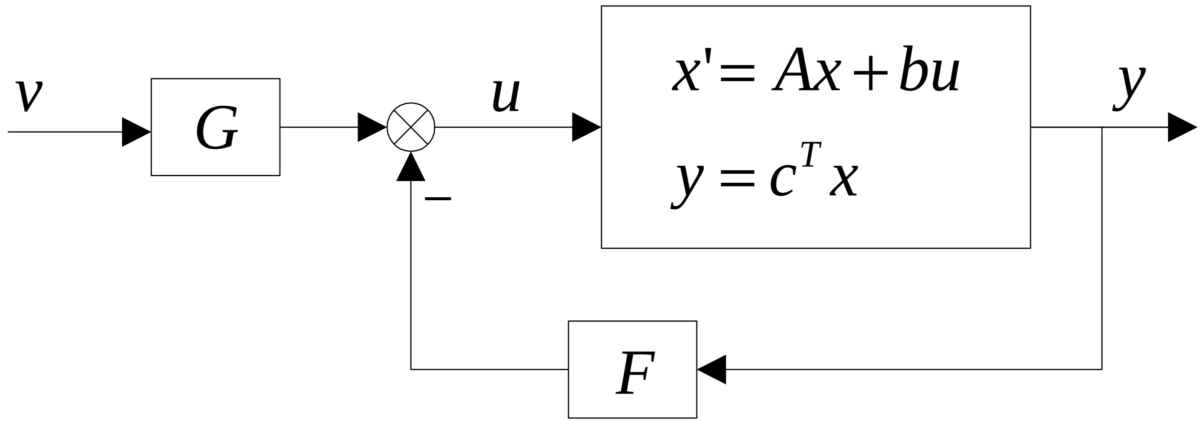
Twierdzenie. *Każdy system obserwowalny ma opis równoważny, w którym*

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{bmatrix} \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{c}^T\mathbf{T}^{-1} = \left[\, 1 \;\, 0 \;\, \cdots \;\, 0 \,\right]$$

$a_0, a_1, ..., a_{k-1}$ – współczynniki wiel. charakterystycznego macierzy $\mathbf{A}$

#04
Układy ze sprzężeniem zwrotnym, przesuwanie biegunów

Statyczne sprzężenie zwrotne od wyjścia



$$u = -Fy + Gv = -Fc^T x + Gv$$
$$x' = Ax + b\left(-Fc^T x + Gv\right) = \left(A - bFc^T\right)x + bGv$$

Opis układu zamkniętego (o wejściu v)

$$x' = A_z x + B_z v \qquad\qquad y = c^T x$$

gdzie

$$A_z = A - bFc^T, \qquad\qquad B_z = bG$$

Sformułowanie zadania przesuwania biegunów za pomocą sprzężenia zwrotnego od wyjścia

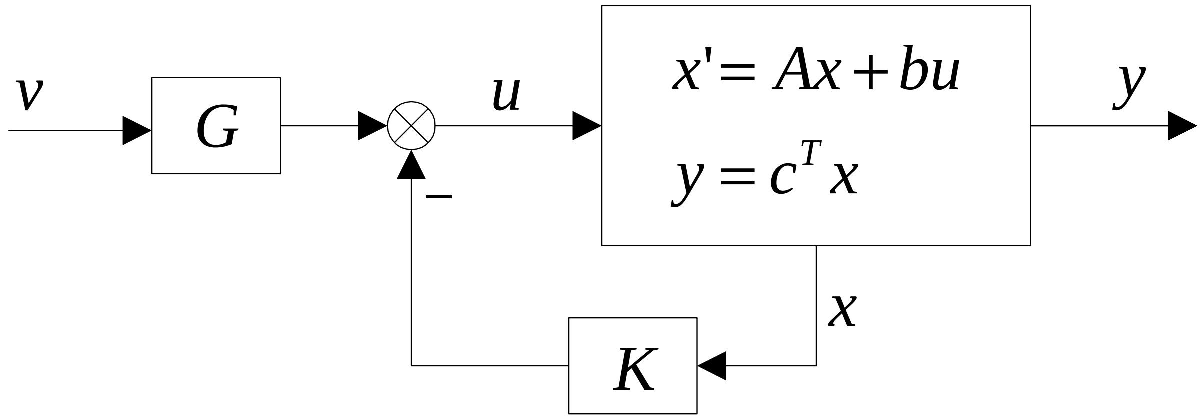
Dane są A, b i c oraz pożądany wielomian charakterystyczny układu zamkniętego

$$w_z(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0$$

Wyznaczyć macierz F taką, że

$$\det\left(sI - A_z\right) = \det\left(sI - A + bFc^T\right) = w_z(s)$$

Statyczne sprzężenie zwrotne od stanu



$$
\begin{aligned}
u &= -Kx + Gv \\
x' &= Ax + b\left(-Kx + Gv\right) = \left(A - bK\right)x + bGv
\end{aligned}
$$

Opis układu zamkniętego (o wejściu v)

$$x' = A_z x + B_z v \qquad\qquad y = c^T x$$

gdzie

$$A_z = A - bK, \qquad\qquad B_z = bG$$

Sformułowanie zadania przesuwania biegunów za pomocą sprzężenia zwrotnego od stanu

Dane są A i c oraz pożądany wielomian charakterystyczny układu zamkniętego

$$w_z(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + ... + d_1 s + d_0$$

Wyznaczyć macierz K taką, że

$$\det(sI - A_z) = \det(sI - A + bK) = w_z(s) \tag{1}$$

Rozwiązanie

Lemat 1 *Jeżeli para A, b ma postać kanoniczną*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

to macierz K spełniająca (1) ma postać

$$K = [d_0 - a_0, d_1 - a_1, ..., d_{n-1} - a_{n-1}]$$

Przekształcenie opisu systemu sterowalnego do postaci kanonicznej (gdy para (A, b) nie jest w postaci kanonicznej)

Odpowiednia macierz podobieństwa ma postać

$$P = \begin{bmatrix} p \\ pA \\ \vdots \\ pA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie } p \text{ jest ostatnim } (n\text{-tym}) \text{ wierszem macierzy odwrotnej } [b, Ab, ..., A^{n-1}b]^{-1}$$

Wtedy para (PAP^{-1}, Pb) jest opisem kanonicznym tego samego systemu.

Lemat 2 *Jeżeli para (A, b) jest sterowalna, to macierz K spełniająca (1) ma postać*

$$K = [d_0 - a_0, d_1 - a_1, ..., d_{n-1} - a_{n-1}]P$$

Przykład

Dla układu o macierzach $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ wyznaczyć macierz sprzężenia zwrotnego od stanu $K \in R^{1,2}$ taką że układ zamknięty będzie miał bieguny równe $s_1 = s_2 = -2$.

Rozwiązanie

Pożądany wielomian charakterystyczny układu zamkniętego ma postać

$$w_z(s) = (s - s_1)(s - s_2) = (s + 2)(s + 2) = s^2 + 4s + 4$$

czyli $d_0 = d_1 = 4$. Dalej

$$[b, Ab]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ a zatem } p = [1, -1]$$

Macierz podobieństwa

$$P = \begin{bmatrix} p \\ pA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Postać kanoniczna

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ (czyli } a_0 = 1,\ a_1 = -2) \text{ oraz } Pb = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Macierz sprzężenia

$$K = [d_0 - a_0, d_1 - a_1]P = [3, 6] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [9, -3]$$

Sprawdzenie

Macierz układu zamkniętego

$$A_z = A - bK = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [9, -3] = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ -9 & 4 \end{bmatrix}$$

ma wartości własne $s_1 = s_2 = -2$.

Sterowanie optymalne

Sterowanie Procesami Ciągłymi

2017

Optymalizacja statyczna funkcji

Funkcja celu/kryterialna/kosztów

$$\begin{aligned} Q(x) &\rightarrow \min_x \\ x^* &= \arg\min_x Q(x) \end{aligned}$$

Ograniczenie

$$x \in X, \qquad \text{gdzie } X \text{ – zbiór rozwiązań dopuszczalnych}$$

Cel
Znaleźć takie $x^* \in X$, że dla każdego $x \in X$ zachodzi

$$Q(x^*) \leq Q(x)$$

Pojęcie funkcjonału

uogólnienie pojęcia funkcji
mapowanie przypisujące funkcji $x(t)$ liczbę Q

$$x(t) \longrightarrow Q$$

Przykłady

$$Q = \max_{t \in R} |x(t)|, \qquad Q = \int_a^b x^2(t)dt$$

Optymalizacja dynamiczna

Chodzi o znalezienie takiej funkcji $x^*(t)$ ze zbioru dopuszczalnego X, że dla każdej funkcji $x(t) \in X$ zachodzi

$$Q\left\{x^*(t)\right\} \leq Q\left\{x(t)\right\}$$

Sformułowanie problemu

Zadanie sterowania optymalnego obiektem nieliniowym

$$x'(t) = f\left(x(t), u(t), t\right), \qquad t \in [t_0, t_k]$$

zminimalizować wskaźnik jakości (koszt sterowania)

$$G(x, u) = \int_{t_0}^{t_k} g\left(x(t), u(t), t\right) dt, \qquad g\left(x(t), u(t), t\right) \text{ – koszt chwilowy}$$

przy danym stanie początkowym x_0 i końcowym x_k, tj

$$x(t_0) = x_0 \qquad \text{i} \qquad x(t_k) = x_k$$

i ograniczeń nałożonych na proces sterujący

$$u(t) \in U, \qquad U \text{ – zbiór sterowań dopuszczalnych}$$

Problem jest nieskończenie wymiarowy !!!

Przykładowe kryteria

- sterowanie minimalnoczasowe

$$\begin{aligned} g\left(x(t), u(t), t\right) &= 1 \\ G\left(x, u\right) &= \int_{t_0}^{t_k} 1 dt = t_k - t_0 \end{aligned}$$

- sterowanie minimalnoenergetyczne

$$\begin{aligned} g\left(x(t), u(t), t\right) &= u^2(t) \\ G\left(x, u\right) &= \int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt \end{aligned}$$

- całka z kwadratu stanu i sterowania

$$G\left(x, u\right) = \int_{t_0}^{t_k} \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt$$

- problem ze swobodnym stanem końcowym

$$G = F(x(t_k))$$

Rachunek wariacyjny

Minimum lokalne funkcji (przypomnienie)

Funkcja $Q(x)$ ma w punkcie x^* minimum lokalne jeśli istnieje takie $\varepsilon > 0$ (dowolnie małe *otoczenie*), że

$$\|x - x^*\| < \varepsilon \Longrightarrow Q(x) \geq Q(x^*)$$

Jeśli funkcja $Q(x)$ jest różniczkowalna to

$$Q'(x^*) = 0.$$

Wnioskowanie w drugą stronę jest nieprawdziwe !!!

Rachunek wariacyjny

Pojęcie otoczenia w przestrzeni krzywych

Zdefiniujmy normę funkcji

$$\|x(t)\| = \max_{t\in[t_0,t_k]} |x(t)| + \max_{t\in[t_0,t_k]} \left|x'(t)\right|$$

Funkcjonał $Q\left\{x(t)\right\}$ osiąga lokalne minimum na krzywej $x^*(t)$ jeśli istnieje takie $\varepsilon > 0$ (otoczenie w przestrzeni krzywych), że

$$\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon \Longrightarrow Q\left\{x(t)\right\} \geq Q\left\{x^*(t)\right\}$$

Rachunek wariacyjny

Równanie Eulera-Lagrange'a

$$\begin{aligned} x'(t) &= f\left(x(t), u(t), t\right) \quad \longrightarrow \quad u(t) = F\left(x(t), x'(t), t\right) \\ g\left(x(t), u(t), t\right) &= g\left(x(t), \underbrace{F\left(x(t), x'(t), t\right)}, t\right) \triangleq \widetilde{g}\left(x(t), x'(t), t\right) \end{aligned}$$

Jeżeli funkcjonał (funkcja kosztów) $G\left\{x(t)\right\} = \int_{t_0}^{t_k} \widetilde{g}\left(x(t), x'(t), t\right) dt$ ma minimum lokalne na krzywej $x^*(t)$, to spełnione jest na niej równanie *Eulera-Lagrange'a*

$$\widetilde{g}_x(t) = \frac{d}{dt}\widetilde{g}_{x'}(t), \text{ dla } t \in [t_0, t_k]$$

gdzie

$$\widetilde{g}_x(t) = \frac{\partial}{\partial x}\widetilde{g}\left(x(t), x'(t), t\right) \quad \text{i} \quad \widetilde{g}_{x'}(t) = \frac{\partial}{\partial x'}\widetilde{g}\left(x(t), x'(t), t\right)$$

Jest to warunek konieczny, niewystarczający !!!

Mnożniki Lagrange'a

Jeżeli funkcja $f(x) : R^n \to R$ (tzn. x jest wielowymiarowe) ma ekstremum warunkowe w punkcie x^*, przy warunku $G(x) = 0$, gdzie $G(x) : R^n \to R^m$, to w punkcie $x = x^*$ spełoniny jest układ równań

$$\begin{cases} f'(x) = \Lambda \circ G'(x) \\ G(x) = 0 \end{cases}$$

gdzie

$$\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)^T$$

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – tzw. mnożniki Lagrangea

Mnożniki Lagrange'a

Metoda mnożników Lagrange'a – technika pozwalająca na sprowadzenie zadania optymalizacji z ograniczeniami do zadania bez ograniczeń

Przykład. Zminimalizować funkcję

$$f(x, y) = x + y$$

przy ograniczeniu, że punkt (x, y) leży na okręgu jednostkowym, tj.

$$x^2 + y^2 = 1,$$

czyli

$$G(x, y) = 0, \qquad \text{gdzie } G(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Mnożniki Lagrange'a

Tworzy się funkcję

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda G(x, y)$$

Można pokazać, że warunkiem koniecznym istnienia ekstremum w punkcie (x, y) jest

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0 \end{cases}$$

Mnożniki Lagrange'a

W naszym przykładzie

$$\begin{cases} 1+2\lambda x = 0 \\ 1+2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{cases}$$

co prowadzi do rozwiązania $x = y$, $2x^2 = 1$, a zatem

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \text{lub } x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Można zastosować tw. Weierstrassa, bo okrąg jest zwarty (domknięty i ograniczony)

Zasada maksimum Pontryagina, funkcja Hamiltona

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= f\left(x(t), u(t), t\right), \qquad t \in [t_0, t_k] \\
G\left(x, u\right) &= \int_{t_0}^{t_k} g\left(x(t), u(t), t\right) dt
\end{aligned}
$$

Funkcja Hamiltona (hamiltonian)

$$
H\left(\lambda(t), x(t), u(t), t\right) \triangleq -g\left(x(t), u(t), t\right) + \left\langle \lambda(t), f\left(x(t), u(t), t\right)\right\rangle
$$

gdzie

$$
\left\langle \lambda(t), f\left(x(t), u(t), t\right)\right\rangle = \lambda^T(t) f\left(x(t), u(t), t\right)
$$

Zasada maksimum Pontryagina, warunek konieczny optymalności

Jeżeli (x^*, u^*) jest optymalnym procesem sterowania, to sterowanie u^* maksymalizuje hamiltonian problemu tj.

$$H\left(\lambda^*(t), x^*(t), u^*(t), t\right) = \max_{u \in U} H\left(\lambda^*(t), x^*(t), u(t), t\right)$$

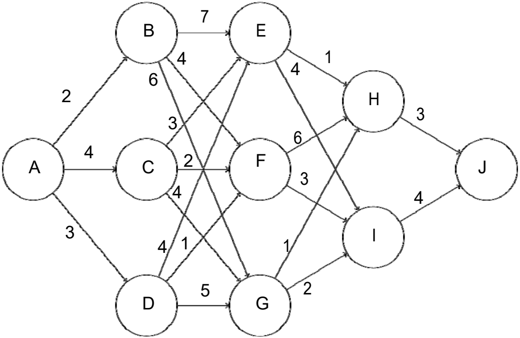
gdzie $\lambda^*(t)$ (tzw. funkcja sprzężona) spełnia liniowe równanie różniczkowe (tzw. sprzężone)

$$\lambda'^*(t) = -f_x^T\left(x^*(t), u^*(t), t\right) + g_x^T\left(x^*(t), u^*(t), t\right)$$

z warunkiem końcowym

$$\lambda^*(t_k) = 0.$$

Zasada Bellmana



Poszukiwanie trajektorii optymalnej

Zasada Bellmana

Jeżeli optymalną trajektorią z punktu A do punktu D jest trajektoria

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D,$$

to optymalną trajektorią z punktu B do punktu D jest trajektoria

$$B \longrightarrow C \longrightarrow D.$$

(*tzn. końcówka trajektorii optymalnej jest optymalna sama w sobie, strategia optymalna nie zależy od historii procesu*)
Dowód - nie wprost, oczywisty.

Zasada Bellmana

Funkcja Bellmana

$$\begin{aligned} S\left(x(t),t\right) &\triangleq \min_{t\in U[t,t_k]} \int_t^{t_k} g\left(x(\tau),u(\tau),\tau\right) d\tau, \\ \text{przy warunku } x(t_k) &= x_k \end{aligned}$$

Funkcja $S\left(x(t),t\right)$ określa jaki jest najmniejszy możliwy koszt dotarcia do stanu końcowego x_k w chwili t_k, jeżeli w chwili t obiekt znajduje się w stanie $x(t)$.

Zasada Bellmana

Równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana HJB

$$S\left(x(t),t\right) \triangleq \min_{t\in U[t,t_k]} \left(\int_t^{t+\Delta t} g\left(x(\tau),u(\tau),\tau\right) d\tau + S\left(x(t+\Delta t),t+\Delta\right.\right.$$

po rozwinięciu funkcji $S\left(x(t+\Delta t), t+\Delta t\right)$ w szereg Taylora względem punktu $S\left(x(t),t\right)$ i przejściu $\Delta t \rightarrow 0$ otrzymuje się równianie *Hamiltona-Jacobiego-Bellmana*

$$-S_t\left(x(t),t\right) = \min_{u(t)\in U} \left(g(x(t),u(t),t) + S_x\left(x(t),t\right) f\left(x(t),u(t),t\right)\right)$$

gdzie

$$S_t\left(x(t),t\right) = \frac{\partial}{\partial t} S\left(x(t),t\right) \quad \text{i} \quad S_x\left(x(t),t\right) = \frac{\partial}{\partial x} S\left(x(t),t\right)$$

Zasada Bellmana

Programowanie dynamiczne (metoda postępowania)

1. Minimalizujemy prawą stronę równania HJB traktując x, $S_x(x,t)$ i t jako parametry, uzyskujemy

$$u\left(x, S_x(x,t), t\right).$$

2. Wstawiamy $u\left(x, S_x(x,t), t\right)$ do równania HJB.
3. Rozwiązujemy je przy warunku granicznym

$$S\left(x, t_k\right) = 0.$$

Regulator liniowo kwadratowy (LQR)

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

kwadratowa funkcja kosztów

$$G = \underbrace{x^T(t_k)F(t_k)x(t_k)}_{\text{koszt stanu końcowego}} + \int_{t_0}^{t_k} \left(x^T Qx + u^T Ru \right) dt$$

LQR – optymalne sterowanie

Zastosować sprzężenie zwrotne od stanu

$$u(t) = -Kx(t),$$

gdzie

$$K = R^{-1}B^T P(t),$$

zaś $P(t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego *Riccatiego*

$$A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = -P'(t),$$

z warunkiem brzegowym

$$P(t_k) = F(t_k).$$

- rozwiązanie wyznaczone analitycznie
- układ odporny na zakłócenia

Źródła

- R. Bellman, *Adaptacyjne procesy sterowania*, PWN, Warszawa, 1965
- H. Górecki, *Optymalizacja systemów dynamicznych*, PWN, Warszawa, 1993.
- J. Zabczyk, *Zarys matematycznej teorii sterowania*,PWN,Warszawa 1991.
- http://staff.iiar.pwr.wroc.pl/krystyn.styczen/
- http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=tst
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Regulator_liniowo-kwadratowy
- http://student.agh.edu.pl/~ptibbets/wyklady_pdf/

Sterowanie predykcyjne (MPC, *ang. Model Predictive Control*)

Sterowanie Procesami Ciągłymi

2017

Istota pomysłu

W tradycyjnym układzie regulacji sterowanie jest generowane w oparciu o funkcję uchybu $\varepsilon(t)$ w chwili bieżącej i w chwilach poprzednich.

W sterowaniu predykcyjnym buduje się model obiektu i wylicza prognozę jego zachowania się. Sposób sterowania uwzględnia przewidywane zachowanie się obiektu w przyszłości.

Przesuwany horyzont

- horyzont prognozy H_p

$$k+1, k+2, \ldots\ldots\ldots, k+H_p$$

- horyzont sterowania H_s

$$k+1, k+2, \ldots, k+H_s$$

zazwyczaj $H_s < H_p$

Algorytm

1. Na podstawie obecnych i przeszłych pomiarów wejścia, wyjścia i stanu (ew. szacowanych), stosując model obiektu (wzór opisujący jego zachowanie), wyznaczyć prognozę wyjścia na H_p chwil "w przyszłość"
$$\overline{y}_{k+1}, \overline{y}_{k+2}, \dots\dots\dots, \overline{y}_{k+H_p}$$
   Prognozowane wartości wyjść wyznaczone w etapie 1 zależą oczywiście od wartości przyszłych sterowań (są ich funkcjami).
2. Przy danym żadanym (zadanym) procesie wyjściowym $y_{\dot{z},k+1}, y_{\dot{z},k+2}, \dots\dots\dots, \overline{y}_{\dot{z},k+H_p}$ zminimalizować wskaźnik kosztu sterowania
$$J(u_{k+1}, \dots, u_{k+H_s}) = \sum_{t=k+1}^{H_p} \left\{ w_y \left(\overline{y}_t - y_{\dot{z},t} \right)^2 + w_u (\Delta u_t)^2 \right\},$$
   gdzie w_y i w_u to wagi, zaś $\Delta u_t = u_t - u_{t-1}$, tzn. preferujemy małe zmiany sterowania.

Algorytm (c.d.)

3. Z uzyskanego rozwiązania optymalnego $u^*_{k+1}, \ldots, u^*_{k+H_s}$ w chwili kolejnej, tj. $t = k + 1$ podać na wejście obiektu wartość u^*_{k+1} (tylko pierwszą wartość z ciągu optymalnego wyznaczonego w chwili k).
4. Przesunąć horyzont czasowy o jeden, tzn. chwilą obecną staje się $t = k + 1$, okresem prognozy chwile
$$t = k + 2, k + 3, \ldots\ldots\ldots, k + H_p + 1,$$
a horyzontem sterowania
$$t = k + 2, k + 3, \ldots, k + H_s + 1$$
5. Przejść do etapu 1 powtarzając optymalizację dla przesuniętego horyzontu.

Heurystyczne metody optymalizacji
Symulowane wyżarzanie (metoda iteracyjna)

W i-tej iteracji dla wektora

$$\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_d^{(i)})^T$$

losuje się wektor z jego otoczenia

$$\widetilde{\mathbf{x}} = (x_1^{(i)} + \Delta_1, x_2^{(i)} + \Delta_2, \ldots, x_d^{(i)} + \Delta_d)^T$$

Jeżeli nastąpi poprawa funkcji kryterialnej $(J(\widetilde{\mathbf{x}}) < J(\mathbf{x}^{(i)}))$ to przechodzi się **bezwarunkowo** do punktu $\widetilde{\mathbf{x}}$, tzn.

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \widetilde{\mathbf{x}}$$

Heurystyczne metody optymalizacji
Symulowane wyżarzanie (c.d.)

W przeciwnym wypadku ($J(\widetilde{\mathbf{x}}) \geq J(\mathbf{x}^{(i)})$) warunkiem akceptacji nowego rozwiązania $\widetilde{\mathbf{x}}$ jest zajście zdarzenia losowego

$$u < c_1 e^{c_2 i},$$

gdzie wylosowane u ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Jeśli warunek losowy nie zachodzi, pozostaje się przy starym rozwiązaniu, tj.

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i)}$$

Heurystyczne metody optymalizacji

Algorytmy genetyczne

- Pojęcie pokolenia

  $\{\mathbf{x}_n^{(i)}\}_{n=1}^N$

  i – numer pokolenia

  $\mathbf{x}_n^{(i)}$ – n-ty osobnik w i-tym pokoleniu (wektor d-wymiarowy)

- **Selekcja** – wybór osobników do roli rodziców (do generacji kolejnego pokolenia). Prawdopodobieństwo selekcji zależne od wartości funkcji celu danego osobnika (np. reguła ruletki.)

Heurystyczne metody optymalizacji
Algorytmy genetyczne (c.d.)

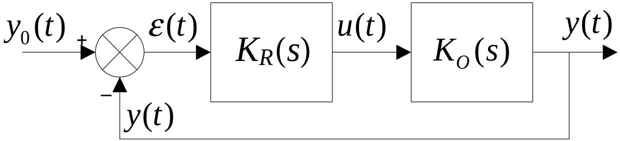
- **Krzyżowanie** – dobór wyselekcjonowanych osobników w pary i generacja potomków. Przykładowym operatorem może być średnia dwóch wektorów. Stosuje się też operacje biotwe.
- **Mutacja** – modyfikacja wygenerowanych potomków w stosunku do wartości otrzymanych w wyniku krzyżowania rodziców.

Układy z regulatorami P, PI oraz PID

Sterowanie Procesami Ciągłymi

2016

Układ automatycznej regulacji



$$y_0(t) = \mathbf{1}(t)$$

Postulaty, kryteria oceny jakości regulacji

- stabilność
- wartość uchybu w stanie ustalonym

$$\varepsilon_{ust} = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t)$$

- czas regulacji – czas po którym zagwarantowane jest zredukowanie uchybu do 5% wartości początkowej

$$t_r : \quad |\varepsilon(t) - \varepsilon_{\text{ust}}| \leqslant \delta,\ t \geqslant t_r,\ \delta = 5\% \, |\varepsilon(0) - \varepsilon_{\text{ust}}| \, ,$$

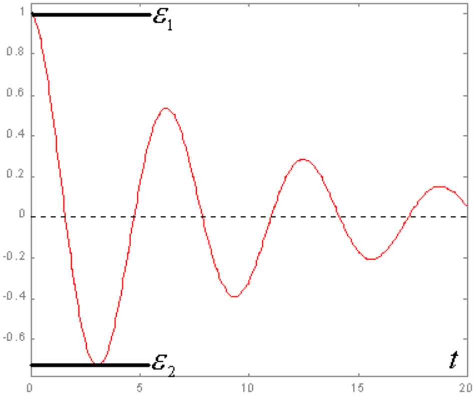
- całka kwadratu uchybu

$$Q = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt$$

Postulaty, kryteria oceny jakości regulacji

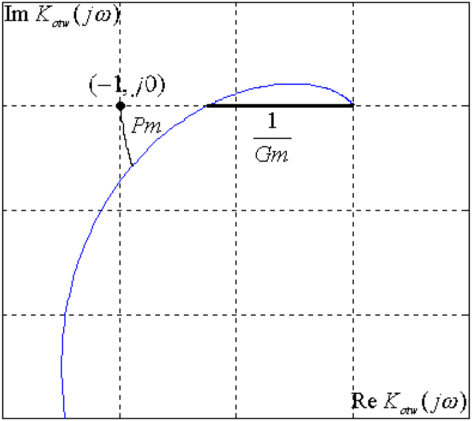
- przeregulowanie

$$\varkappa = \left| \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right| \cdot 100\,\%$$



Postulaty, kryteria oceny jakości regulacji

- szybkość regulacji – rząd (numer) pierwszej niezerowej pochodnej $\lambda_{UAR}(t)$ na starcie, tzn. dla $t = 0$
- zapas amplitudy i zapas fazy



Regulacja typu P

Uchyb w stanie ustalonym

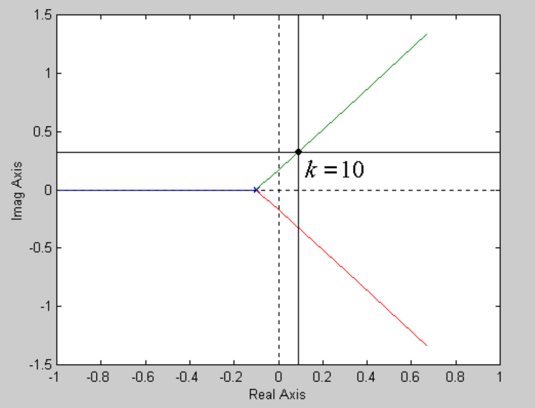
$$
\begin{aligned}
K_R(s) &= k_p \\
K_{otw}(s) &= k_p K_O(s) = k_p \frac{L_O(s)}{M_O(s)} \qquad K_E(s) = \frac{1}{1+K_{otw}(s)} \\
E(s) &= \frac{1}{s} K_E(s) \\
\varepsilon_{ust} &= \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{1}{1+k_p K_0(0)} \neq 0 \\
\text{np. } K_O(s) &= \frac{1}{s+1} \qquad \to \qquad \varepsilon_{ust} = \frac{1}{1+k_p}
\end{aligned}
$$

Regulacja typu P

Oscylacje, kwestia stabilnośći, linie pierwiastkowe

Przykład

$$K_O(s) = \frac{1}{(s+1)^3}, \quad K_{otw}(s) = \frac{k_p}{(s+1)^3}, \quad K_{UAR}(s) = \frac{k_p}{(s+1)^3 + k_p}$$



Regulacja typu P

Szybkość regulacji

$$
\begin{aligned}
K_0(s) &= \frac{b_l s^l + \ldots + b_0}{a_m s^m + \ldots + a_0} \qquad\qquad p = m - l \geq 0 \\
K_{otw}(s) &= k_p \frac{b_l s^l + \ldots + b_0}{a_m s^m + \ldots + a_0} \\
K_{UAR}(s) &= \frac{k_p(b_l s^l + \ldots + b_0)}{a_m s^m + \ldots + a_0 + k_p(b_l s^l + \ldots + b_0)}
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{t\to 0} \lambda^{(i)}_{UAR}(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot s^i \cdot \frac{1}{s} K_{UAR}(s) \begin{array}{l} = 0, \text{ dla } i = 0, 1, \ldots, p-1 \\ \neq 0, \text{ dla } i = p \end{array}
$$

Przykłady

$$
\begin{aligned}
K_O(s) &= \frac{1}{s+1} \quad \rightarrow \quad \lambda_{UAR}(0) = 0, \quad \lambda'_{UAR}(0) \neq 0 \\
K_O(s) &= \frac{1}{(s+1)^2} \quad \rightarrow \quad \lambda_{UAR}(0) = 0, \quad \lambda'_{UAR}(0) = 0, \quad \lambda''_{UAR}(0) \neq
\end{aligned}
$$

Regulacja typu I

Uchyb w stanie ustalonym

$$
\begin{aligned}
K_R(s) &= \frac{k_i}{s} \\
K_{otw}(s) &= \frac{k_i}{s} K_O(s) = \frac{k_i}{s}\frac{L_O(s)}{M_O(s)} \qquad\qquad K_E(s) = \frac{1}{1+K_{otw}(s)} \\
E(s) &= \frac{1}{s} K_E(s) \\
\varepsilon_{ust} &= \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{1}{1+\frac{k_i}{s}K_0(0)} = 0
\end{aligned}
$$

Regulacja typu I

Szybkość regulacji

$$K_0(s) = \frac{b_l s^l + \ldots + b_0}{a_m s^m + \ldots + a_0} \qquad p = m - l \geq 0$$

$$K_{otw}(s) = \frac{k_i}{s}\frac{b_l s^l + \ldots + b_0}{a_m s^m + \ldots + a_0}$$

$$K_{UAR}(s) = \frac{k_i(b_l s^l + \ldots + b_0)}{s\,(a_m s^m + \ldots + a_0) + k_i(b_l s^l + \ldots + b_0)}$$

$$\lim_{t\to 0} \lambda_{UAR}^{(i)}(t) = \lim_{s\to\infty} s \cdot s^i \cdot \frac{1}{s} K_{UAR}(s) \begin{array}{l} = 0, \text{ dla } i = 0, 1, \ldots, p \\ \neq 0, \text{ dla } i = p+1 \end{array}$$

Przykład

$$K_O(s) = \frac{1}{s+1} \quad \to \quad \lambda_{UAR}(0) = 0, \quad \lambda'_{UAR}(0) = 0, \quad \lambda''_{UAR}(0) \neq 0$$

Regulacja typu I

Przykład. Analityczna analiza wpływu wartości nastawy na kryterium całkowe

$$K_O(s) = \frac{a}{s+b}, \qquad a, b > 0 \qquad K_R(s) = \frac{k_i}{s}$$

$$K_{otw}(s) = \frac{k_i}{s}\frac{a}{s+b} \qquad K_E(s) = \frac{1}{1+K_{otw}(s)} = \frac{(s+b)\,s}{s^2+bs+k_i a}$$

$$E(s) = \frac{s+b}{s^2+bs+k_i a}$$

$$Q(k_i) = \int_0^\infty \varepsilon^2(t)dt = \frac{k_i a + b^2}{2k_i ab}$$

$$\frac{\partial Q(k_i)}{\partial k_i} = \frac{2k_i a^2 b - 2ab\left(k_i a + b^2\right)}{(2k_i ab)^2} = \frac{-2ab^3}{(2k_i ab)^2} \qquad k_i \nearrow$$

Regulacja typu PI

Uchyb w stanie ustalonym

$$
\begin{aligned}
K_R(s) &= k_p + \frac{k_i}{s} = \frac{k_p s + k_i}{s} \\
K_{otw}(s) &= \frac{k_p s + k_i}{s} K_O(s) = \frac{k_p s + k_i}{s} \frac{L_O(s)}{M_O(s)} \\
K_E(s) &= \frac{1}{1 + K_{otw}(s)} \\
E(s) &= \frac{1}{s} K_E(s) \\
\varepsilon_{ust} &= \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{s}{s + (k_p s + k_i) K_0(0)} = 0
\end{aligned}
$$

Regulacja typu PI

Szybkość regulacji

$$K_0(s) = \frac{b_l s^l + \ldots + b_0}{a_m s^m + \ldots + a_0} \qquad p = m - l \geq 0$$

$$K_{otw}(s) = \frac{k_p s + k_i}{s} \frac{b_l s^l + \ldots + b_0}{a_m s^m + \ldots + a_0}$$

$$K_{UAR}(s) = \frac{(k_p s + k_i)(b_l s^l + \ldots + b_0)}{s(a_m s^m + \ldots + a_0) + (k_p s + k_i)(b_l s^l + \ldots + b_0)}$$

$$\lim_{t \to 0} \lambda^{(i)}_{UAR}(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot s^i \cdot \frac{1}{s} K_{UAR}(s) \begin{array}{l} = 0, \text{ dla } i = 0, 1, \ldots, p-1 \\ \neq 0, \text{ dla } i = p \end{array}$$

Regulacja typu PID

Szybkość regulacji

$$K_R(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s}$$

$$\begin{aligned} K_{otw}(s) &= \frac{k_d s^2 + k_p s + k_i}{s} \frac{b_l s^l + \ldots + b_0}{a_m s^m + \ldots + a_0} \\ K_{UAR}(s) &= \frac{\left(k_d s^2 + k_p s + k_i\right)\left(b_l s^l + \ldots + b_0\right)}{s\left(a_m s^m + \ldots + a_0\right) + \left(k_d s^2 + k_p s + k_i\right)\left(b_l s^l + \ldots + b_0\right)} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \to 0} \lambda_{UAR}^{(i)}(t) = \lim_{s \to \infty} s \cdot s^i \cdot \frac{1}{s} K_{UAR}(s) \begin{array}{l} = 0, \text{ dla } i = 0, 1, \ldots, p-2 \\ \neq 0, \text{ dla } i = p-1 \end{array}$$

Podsumowanie

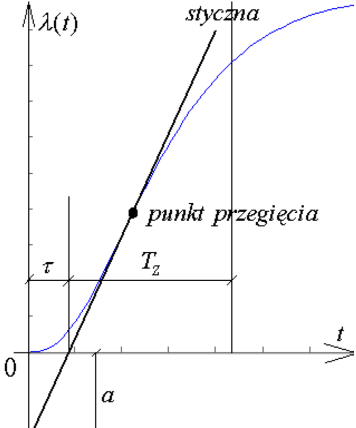
	ε_{ust}	$\dots$	$\lambda^{(p-1)}(0)$	$\lambda^{(p)}(0)$	$\lambda^{(p+1)}(0)$	
P	$\neq 0$		0	$\neq 0$		
I	0		0	0	$\neq 0$	
PI	0		0	$\neq 0$		
PID	0		$\neq 0$			

Pierwsza metoda Zieglera-Nicolsa

Aproksymacja obiektu stabilnego

Uwaga! Nie znamy $K_O(s)$, dokonujemy aproksymacji

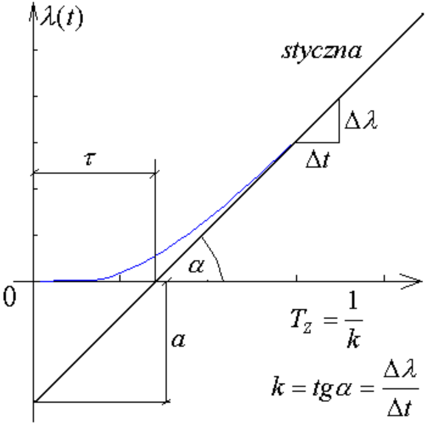
$$K_{approx}^{(1)}(s) = \frac{ke^{-s\tau}}{T_Z s + 1}$$



Pierwsza metoda Zieglera-Nicolsa

Aproksymacja obiektu całkującego

$$K^{(2)}_{approx}(s) = \frac{ke^{-s\tau}}{s}$$



Pierwsza metoda Zieglera-Nicolsa

Rekomendowane ustawienia

Typ regulatora	k_p	$\frac{1}{k_i}$	k_d
P	$1/a$	–	–
PI	$0,9/a$	3τ	–
PID	$1,2/a$	2τ	$\tau/2$

Żuchowski A., *Metoda doboru nastaw regulatora PID uwzględniająca postulowany zapas stabilności modułu i fazy*, Pomiary Automatyka Kontrola, str. 11–13, Nr 1/2004.

Druga metoda Zieglera-Nicolsa

Możliwa do zastosowania dla obiektów stabilnych wyższych rzędów
Nie trzeba aproksymować
Doprowadzamy UAR z regulatorem typu P do granicy stabilność (zwiększając k_p)

Typ regulatora	k_p	T_i	T_d
P	$0,5k_{P,\mathrm{kryt}}$	∞	0
PI	$0,45k_{P,\mathrm{kryt}}$	$T_{\mathrm{osc}}/1,2$	0
PID	$0,6k_{P,\mathrm{kryt}}$	$T_{\mathrm{osc}}/2$	$T_{\mathrm{osc}}/8$

Metoda funkcji opisującej

Przyblizona analiza układów z elementami nieliniowymi

$$u(t) = A \sin \omega t$$

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (b_k \sin k\omega t + c_k \cos k\omega t),$$

pierwsze harmoniczne

$$y_1(t) = b_1 \sin \omega t + c_1 \cos \omega t \approx y(t)$$

funkcja opisująca (transmitancja przybliżająca)

$$J(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{b_1 + jc_1}{A}.$$

Przykładowe elementy nieliniowe

Charakterystyka $f(x)$	Funkcja opisująca dla $x(t) = A\sin\omega t$
$\max\{kx, B\}$	$J(A) = \frac{2k}{\pi}\left(\arcsin\frac{B}{Ak} + \frac{B}{Ak}\left(1 - \left(\frac{B}{Ak}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$
$\begin{cases} B, \text{ dla } x \geqslant 0 \\ -B, \text{ dla } x < 0 \end{cases}$	$J(A) = \frac{4B}{\pi A}$
$\begin{cases} 0, \text{ dla } \lvert x\rvert < a \\ B, \text{ dla } x \geqslant a \\ -B, \text{ dla } x < -a \end{cases}$	$J(A) = \frac{4B}{\pi A}\left(1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Nadążność UAR

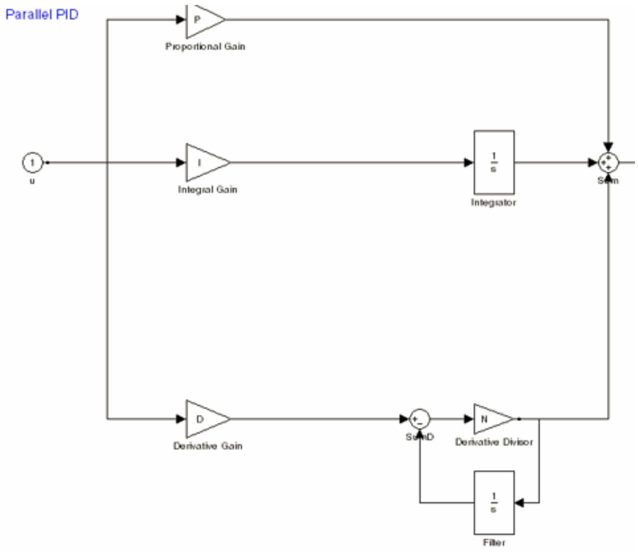
$$y_0(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots + A_r t^r$$

$$K_{otw}(s) = \frac{L_{otw}(s)}{M_{otw}(s)} = \frac{L_{otw}(s)}{s^h N_{otw}(s)}, \qquad h - \text{rząd astatyzmu}$$

- $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$, gdy $h > r$
- $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \varepsilon_{ust} \neq 0$, gdy $h = r$
- $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \infty$, gdy $h < r$

Regulacja dyskretna

Realizacja regulatora PID w MATLAB



Realizacja regulatora PID w MATLAB

Uwaga!

$$K_{PID}^{par}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d \frac{Ns}{s+N} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d \frac{1}{\frac{1}{N}s+1} s$$

$$K_{PID}^{ideal}(s) = k_p \left(1 + \frac{k_i}{s} + k_d \frac{Ns}{s+N}\right)$$

Sterowanie dyskretne układem z czasem ciągłym

Ingerujemy w sterowanie jedynie w dyskretnych chwilach czasu

$$
\begin{aligned}
t &= 0, T, 2T, 3T, ..., nT, ...\\
t &= nT, \qquad n = 0, 1, 2......
\end{aligned}
$$

Okres dyskretyzacji (próbkowania) T jest z góry określony (znany)
Nie mylić dyskretyzacji z kwantyzacją!!!

$$x(nT) \in R$$

Dwie koncepcje:

- sterowanie impulsowe: w chwilach $0, T, 2T, \ldots$ generujemy odpowiednio zmodulowane impulsy Diraca, a pomiędzy tymi chwilami sterowanie jest zerowe
- sterowanie odcinkami stałe: wartość sterowania $u(nT)$ obowiązuje aż do chwili $t = (n+1)T$

Impulsator

jeżeli wejściem impulsatora jest $u(t)$ to jego wyjściem jest

$$u^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\delta(t - nT)$$

$u^*(t)$ jest ciągiem modulowanych impulsów Diraca: $u(0)\delta(t)$, $u(T)\delta(t - T)$, $u(2T)\delta(t - 2T)$,...

Ekstrapolator

jego wejściem jest ciąg impulsów Diraca $u^*(t)$, a wyjściem – funkcja $\overline{u}(t)$ odcinkami stała

$$\overline{u}(t) = u(nT), \text{ dla } t \in [nT, (n+1)T)$$

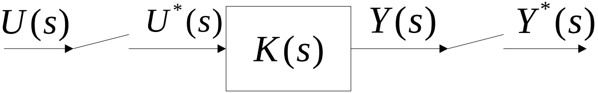
$$\overline{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\left[1(t - nT) - 1(t - (n+1)T)\right]$$

$$\overline{U}(s) = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\left[e^{-nsT} - e^{-(n+1)sT}\right] = \frac{1 - e^{-sT}}{s}\sum_{n=0}^{\infty} u(nT)e^{-nsT}$$

a ponieważ $\sum_{n=0}^{\infty} u(nT)e^{-nsT} = U^*(s)$, to

$$\overline{U}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} U^*(s)$$

Obiekt ciągły z dwoma impulsatorami synchronicznymi



$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT)$$

Oznaczmy

$$u_n = u(nT) \qquad\qquad y_n = y(nT)$$

Wyznaczamy transmitancję systemu (dyskretnego), który przekształca ciąg $\{u_n\}$ w ciąg $\{y_n\}$

$$Y(s) = K(s)U^*(s), \qquad y(t) = \int_0^t k(t-\tau)u^*(\tau)d\tau$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n} u(iT) \int_0^{nT} k(nT-\tau)\delta(\tau - iT)d\tau = \sum_{i=0}^{n} k\left((n-i)T\right) u(iT)$$

Obiekt ciągły z dwoma impulsatorami synchronicznymi

System dyskretny ma zatem odpowiedź impulsową

$$k_n = k(nT)$$

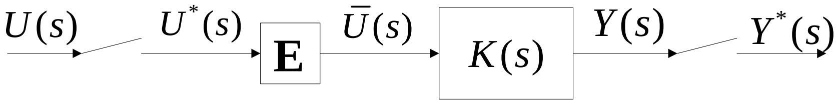
i odpowiednio transmitancję dyskretną

$$\widehat{K}(z) = \mathcal{Z}\left\{k(nT)\right\}$$

Schemat postępowania

$$K(s) \to k(t) \to k(nT) \to \mathcal{Z}\left\{k(nT)\right\} = \widehat{K}(z)$$

Obiekt ciągły sterowany przez impulsator z ekstrapolatorem



$$Y(s) = K(s)\overline{U}(s) = H(s)U^*(s), \qquad \text{gdzie } H(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}K(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)e^{-sT}\right\} = \lambda(t) - \lambda(t-T)$$

po zastosowaniu reguły o splocie można pokazać, że

$$y_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\lambda_{n-i} - \lambda_{n-1-i}\right) u_i$$

Obiekt ciągły sterowany przez impulsator z ekstrapolatorem

Odpowiadający system dyskretny ma zatem transmitancję

$$\overline{K}(z) = \mathcal{Z}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \mathcal{Z}(\lambda_n) - z^{-1}\mathcal{Z}(\lambda_n) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\lambda(nT)\right\}$$

Schemat postępowania

$$\frac{1}{s}K(s) \to \lambda(t) \to \lambda(nT) \to \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\lambda(nT)\right\} = \overline{K}(z)$$

Przykład

Wzmacniacz

$$K(s) = c$$

$$k(t) = c\delta(t) \longrightarrow k(nT) = c\delta(nT)$$

$$\widehat{K}(z) = c\mathcal{Z}\left\{\delta(nT)\right\} = c$$

$$\lambda(t) = c\mathbf{1}(t) \longrightarrow \lambda(nT) = c$$

$$\overline{K}(z) = \frac{z-1}{z} c\mathcal{Z}\left\{1_n\right\} = c\frac{z-1}{z}\frac{z}{z-1} = c$$

Przykład

Element całkujący

$$K(s) = \frac{1}{s}$$

$$k(t) = \mathbf{1}(t) \rightarrow k(nT) = \mathbf{1}_n$$

$$\widehat{K}(z) = \mathcal{Z}\left\{\mathbf{1}_n\right\} = \frac{z}{z-1}$$

$$\lambda(t) = t \rightarrow \lambda(nT) = nT$$

$$\overline{K}(z) = \frac{z-1}{z} T \mathcal{Z}\left\{n\right\} = \frac{z-1}{z} T \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{T}{z-1}$$

Przykład

Obiekt inercyjny I-rzędu

$K(s) = \frac{1}{s+1}$

$k(t) = e^{-t} \rightarrow k(nT) = e^{-nT}$

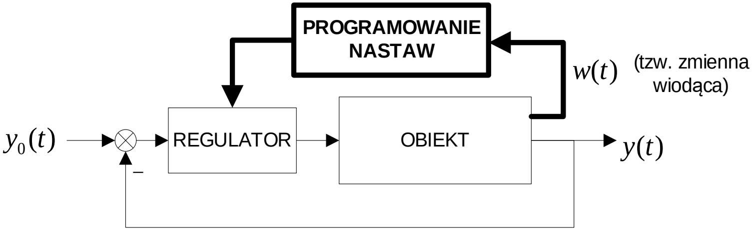
$$\widehat{K}(z) = \mathcal{Z}\left\{e^{-nT}\right\} = \frac{z}{z - e^{-T}}$$

$\lambda(t) = 1 - e^{-t} \rightarrow \lambda(nT) = \mathbf{1}_n - \left(e^{-T}\right)^n$

$$\overline{K}(z) = \frac{z-1}{z}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right) = \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

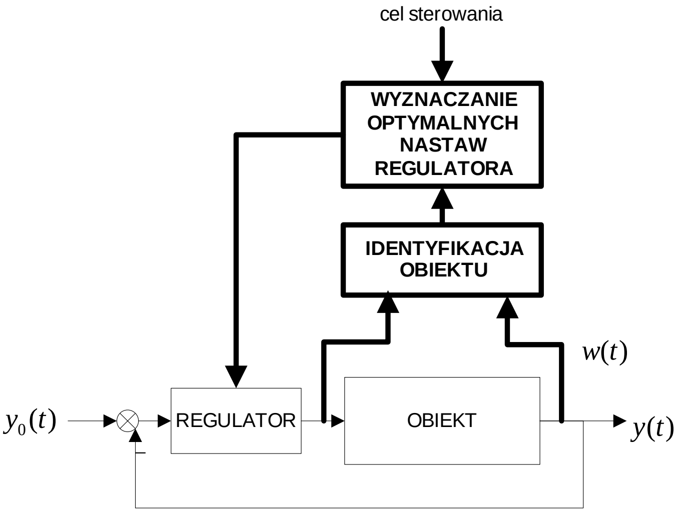
np. dla $T = 1$ mamy $\overline{K}(z) \approx \frac{0.632}{z-0.368}$

Wstęp de regulacji predykcyjnej i adaptacyjnej



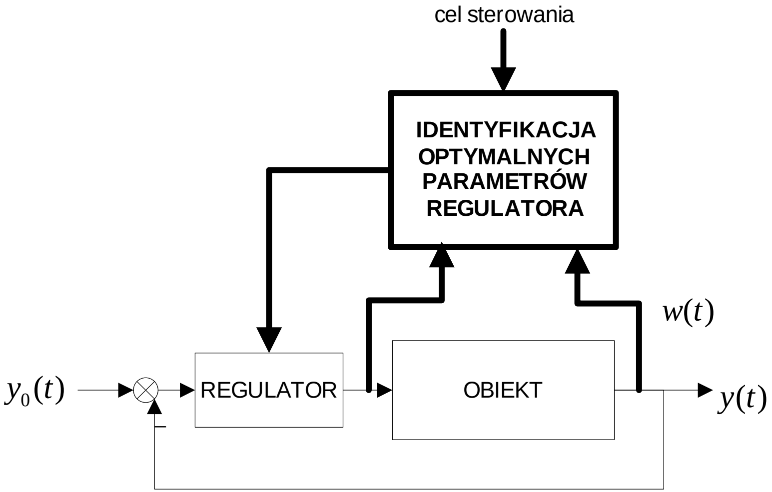
Adaptacja na podstawie zmiennej wiodącej

Wstęp de regulacji predykcyjnej i adaptacyjnej



Pośrednia regulacja adaptacyjna

Wstęp de regulacji predykcyjnej i adaptacyjnej



Bezpośrednia regulacja adaptacyjna

Identyfikacja

Liniowy obiekt statyczny (1)

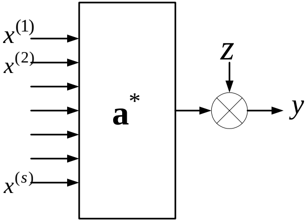


Figure: Liniowy obiekt statyczny typu *MISO*

$$\mathbf{a}^* = \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_s^* \end{bmatrix}$$

Założenia:

$\mathbf{E}z = 0$, $\text{varz} < \infty$

$x^{(i)}$, z – niezależne

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & .. & x_1^{(s)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & .. & x_2^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^{(1)} & x_N^{(2)} & .. & x_N^{(s)} \end{bmatrix}$$

Identyfikacja

Liniowy obiekt statyczny (2)

$$\mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \ \mathbf{Z}_N = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$$

Równanie pomiarów

$$\mathbf{Y}_N = \mathbf{X}_N \mathbf{a}^* + \mathbf{Z}_N$$

Model

$$\overline{\mathbf{Y}}_N(\mathbf{a}) = \mathbf{X}_N \mathbf{a}$$

Istota metody najmniejszych kwadratów

$$\left\| \mathbf{Y}_N - \overline{\mathbf{Y}}_N(\mathbf{a}) \right\|_2^2 \to \min_{\mathbf{a}}$$

Równania normalne

$$\mathbf{X}_N^T \mathbf{X}_N \mathbf{a} = \mathbf{X}_N^T \mathbf{Y}_N$$

Warunek jednoznaczności rozwiązania

$$\mathrm{rank}\mathbf{X}_N = s$$

Estymator NK

$$\widehat{\mathbf{a}}_N = \left(\mathbf{X}_N^T \mathbf{X}_N \right)^{-1} \mathbf{X}_N^T \mathbf{Y}_N = \mathbf{X}_N^+ \mathbf{Y}_N$$

$$\widehat{\mathbf{a}}_N \xrightarrow{p.1} \mathbf{a}^*, \text{ gdy } N \to \infty$$

Identyfikacja

iniowy obiekt dynamiczny typu MA(s) (1)

L

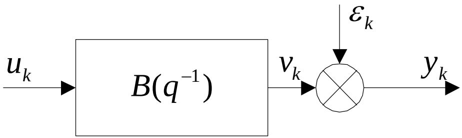


Figure: Model *MA*

$$
\begin{aligned}
v_k &= b_0^* u_k + \ldots + b_s^* u_{k-s} \\
y_k &= v_k + \varepsilon_k \\
y_k &= b_0^* u_k + \ldots + b_s^* u_{k-s} + z_k \\
z_k &= \varepsilon_k
\end{aligned}
$$

Identyfikacja

iniowy obiekt dynamiczny typu MA(s) (2)

L

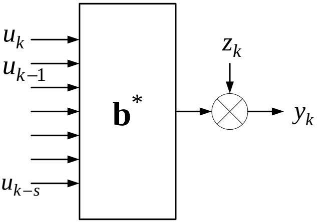


Figure: Model *MA*

$$\mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} b_0^* \\ b_1^* \\ \vdots \\ b_s^* \end{bmatrix}$$

Założenia:

$\mathbf{E}z = 0$, $\text{var} z < \infty$

$\{u_k\}$, $\{z_k\}$ – niezależne

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1^T \\ \boldsymbol{\phi}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_0 & .. & u_{1-s} \\ u_2 & u_1 & .. & u_{2-s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_N & u_{N-1} & .. & u_{N-s} \end{bmatrix}$$

Identyfikacja

Liniowy obiekt dynamiczny typu ARMA(s,p) (1)

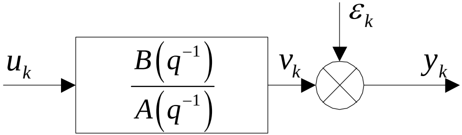


Figure: Model *ARMA*

$$v_k = b_0^* u_k + \ldots + b_s^* u_{k-s} + a_1^* v_{k-1} + \ldots. + a_p^* v_{k-p}$$
$$y_k = v_k + \varepsilon_k$$
$$y_k = b_0^* u_k + \ldots + b_s^* u_{k-s} + a_1^* y_{k-1} + \ldots. + a_p^* y_{k-p} + z_k$$
$$z_k = \varepsilon_k - a_1^* \varepsilon_{k-1} - \ldots - a_p^* \varepsilon_{k-p}$$

Identyfikacja

Liniowy obiekt dynamiczny typu ARMA(s,p) (2)

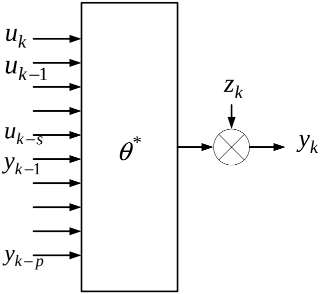


Figure: Model *ARMA*

$$\theta^* = \begin{bmatrix} b_0^* \\ b_1^* \\ \vdots \\ b_s^* \\ a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_p^* \end{bmatrix}$$

$\mathbf{E}z = 0$, $\mathrm{var}z < \infty$

u_{k-i}, z_k – niezależne

y_{k-i}, z_k – zależne, gdy $\{z_k\}$ jest procesem skorelowanym

Identyfikacja

Liniowy obiekt dynamiczny typu ARMA(s,p) (3)

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \vdots \\ \phi_N^T \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_0 & \cdots & u_{1-s} & y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{1-p} \\ u_2 & u_1 & \cdots & u_{2-s} & y_1 & y_0 & \cdots & y_{2-p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_N & u_{N-1} & \cdots & u_{N-s} & y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_{N-p} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_N = \Phi_N \theta^* + \mathbf{Z}_N \qquad \widehat{\theta}_N = \left(\Phi_N^T \Phi_N\right)^{-1} \Phi_N^T \mathbf{Y}_N$$

Wersja rekurencyjna

$$\begin{aligned}\widehat{\theta}_k &= \widehat{\theta}_{k-1} + P_k \phi_k (y_k - \phi_k^T \widehat{\theta}_{k-1}) \\ P_k &= P_{k-1} - \frac{P_{k-1}\phi_k \phi_k^T P_{k-1}}{1 + \phi_k^T P_{k-1} \phi_k}\end{aligned}$$

wszystkie pomiary $\{\phi_k, y_k\}$ mają takie same znaczenie (taką samą wagę)
a co jeśli prawdziwe szukane θ^* zmienia się w czasie?
"stare" pomiary są mniej godne zaufania

Śledzenie parametrów

$$y_k = \theta^* + z_k,$$

$$\widehat{\theta} = \arg\min_{\theta} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(y_k - \theta\right)^2, \qquad (1)$$

α_k – wagi reprezentujące stopień ważności pomiaru y_k

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(y_k - \theta\right)^2 = 2 \sum_{k=1}^{N} \left(\theta\alpha_k - y_k\alpha_k\right),$$

$$\theta \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = \sum_{k=1}^{N} y_k\alpha_k$$

$$\widehat{\theta} = \frac{\sum_{k=1}^{N} y_k\alpha_k}{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k}, \qquad (2)$$

$$\text{gdy } \alpha = \text{const} \quad \text{to} \quad \widehat{\theta} = \frac{\alpha \sum_{k=1}^{N} y_k}{N\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} y_k .$$

Wagi, przykłady

$$\alpha_k = \lambda^{N-k}, \text{ with } 0 < \lambda < 1 \tag{3}$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\lambda}\alpha_k.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{N-k} < \infty$$

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, \text{ as } N - n < k \leq N \\ 0, \text{ as } k \leq N - n \end{cases}.$$

Strojenie

$$\widehat{\theta}_n^{(N)} = \frac{1}{n} \sum_{k=N-n+1}^{N} y_k$$

w chwili N: skok parametru z wartości θ^* na $\theta^* + \Delta$
błąd średniokwadratowy horyzoncie H

$$Q(n) = \sum_{i=N+1}^{N+H} \left(\mathrm{var}\, \widehat{\theta}_n^{(i)} + \mathrm{bias}^2\, \widehat{\theta}_n^{(i)} \right),$$

$$\begin{aligned} Q(n) &= \frac{H\sigma_z^2}{n} + \frac{\Delta^2}{n^2} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{H\sigma_z^2}{n} + \frac{\Delta^2}{n^2} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 \right) \\ &\simeq \frac{H\sigma_z^2}{n} + \frac{\Delta^2}{3} n, \end{aligned}$$

$$n_{opt.} = \arg\min_n Q(n)$$

Składniki kryterium jakości Q(n)

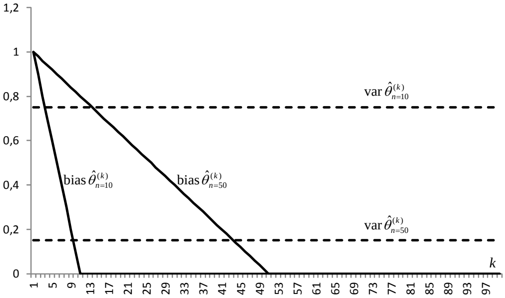


Figure:

Sumaryczny błąd w funkcji n (długości zapamiętywanej historii)

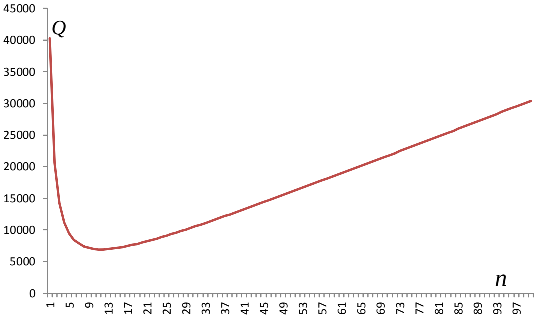


Figure:

Ilustracja działania

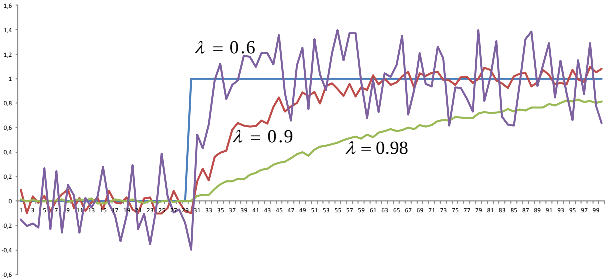


Figure:

#07

Sterowanie dyskretne procesami ciągłymi

1. Impulsator

jeżeli wejściem impulsatora jest $u(t)$ to jego wyjściem jest

$$u^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\delta(t - nT)$$

$u^*(t)$ jest ciągiem modulowanych impulsów Diraca: $u(0)\delta(t)$, $u(T)\delta(t - T)$, $u(2T)\delta(t - 2T)$,...

2. Ekstrapolator

jego wejściem jest ciąg impulsów Diraca $u^*(t)$, a wyjściem – funkcja $\overline{u}(t)$ odcinkami stała

$$\overline{u}(t) = u(nT), \text{ dla } t \in [nT, (n+1)T)$$

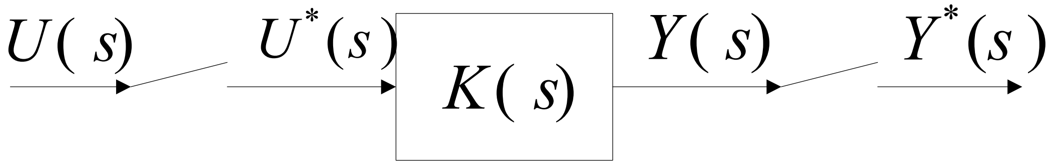
$$\overline{u}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\left[1(t - nT) - 1(t - (n+1)T)\right]$$

$$\overline{U}(s) = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} u(nT)\left[e^{-nsT} - e^{-(n+1)sT}\right] = \frac{1 - e^{-sT}}{s}\sum_{n=0}^{\infty} u(nT)e^{-nsT}$$

a ponieważ $\sum_{n=0}^{\infty} u(nT)e^{-nsT} = U^*(s)$, to

$$\overline{U}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}U^*(s)$$

3. Obiekt ciągły z 2 impulsatorami synchronicznymi



$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT)\delta(t - nT)$$

Oznaczmy

$$u_n = u(nT) \qquad\qquad y_n = y(nT)$$

Wyznaczamy transmitancję systemu (dyskretnego), który przekształca ciąg $\{u_n\}$ w ciąg $\{y_n\}$.

$$\begin{aligned} Y(s) &= K(s)U^*(s) \\ y(t) &= \int_0^t k(t-\tau)u^*(\tau)d\tau \end{aligned}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n} u(iT) \int_0^{nT} k(nT - \tau)\delta(\tau - iT)d\tau = \sum_{i=0}^{n} k\left((n-i)T\right) u(iT)$$

System dyskretny ma zatem odpowiedź impulsową

$$k_n = k(nT)$$

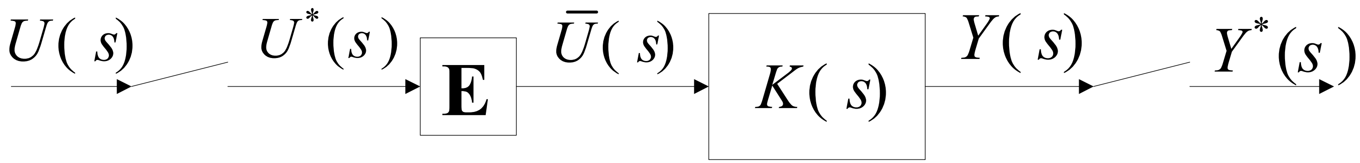
i odpowiednio transmitancję dyskretną

$$\widehat{K}(z) = \mathcal{Z}\left\{k(nT)\right\}$$

Schemat postępowania

$$K(s) \to k(t) \to k(nT) \to \mathcal{Z}\left\{k(nT)\right\} = \widehat{K}(z)$$

4. Obiekt ciągły sterowany przez impulsator z ekstrapolatorem



$$Y(s) = K(s)\overline{U}(s) = H(s)U^*(s), \qquad \text{gdzie } H(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}K(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}K(s)e^{-sT}\right\} = \lambda(t) - \lambda(t-T)$$

po zastosowaniu reguły o splocie można pokazać, że

$$y_n = \sum_{i=0}^{n}\left(\lambda_{n-i} - \lambda_{n-1-i}\right)u_i$$

system dyskretny ma zatem transmitancję

$$\overline{K}(z) = \mathcal{Z}(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \mathcal{Z}(\lambda_n) - z^{-1}\mathcal{Z}(\lambda_n) = \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\lambda(nT)\right\}$$

Schemat postępowania

$$\frac{1}{s}K(s) \to \lambda(t) \to \lambda(nT) \to \frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left\{\lambda(nT)\right\} = \overline{K}(z)$$

5. Przykłady

$$K(s) = c \to k(t) = c\delta(t) \to k(nT) = c\delta(nT) \to \widehat{K}(z) = c\mathcal{Z}\left\{\delta(nT)\right\} = c$$
$$\to \lambda(t) = c\mathbf{1}(t) \to \lambda(nT) = c \to \overline{K}(z) = \tfrac{z-1}{z}c\mathcal{Z}\left\{1_n\right\} = c\tfrac{z-1}{z}\tfrac{z}{z-1} = c$$

UWAGA BŁĄD!!!
W tym miejscu zamiast -nT
powinno być exp(-nT)
itd.

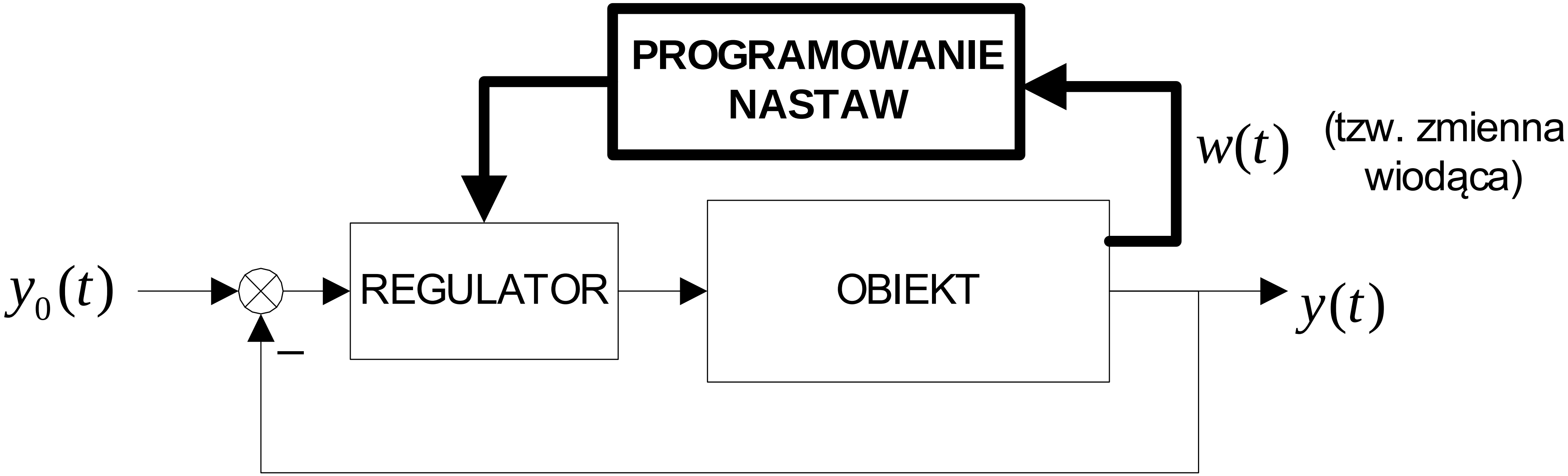
Przepraszam,
G. Mzyk

$$K(s) = \tfrac{1}{s} \to k(t) = \mathbf{1}(t) \to k(nT) = \mathbf{1}_n \to \widehat{K}(z) = \mathcal{Z}\left\{\mathbf{1}_n\right\} = \tfrac{z}{z-1}$$
$$\to \lambda(t) = t \to \lambda(nT) = nT \to \overline{K}(z) = \tfrac{z-1}{z}T\mathcal{Z}\left\{n\right\} = \tfrac{z-1}{z}T\tfrac{z}{(z-1)^2} = \tfrac{T}{z-1}$$

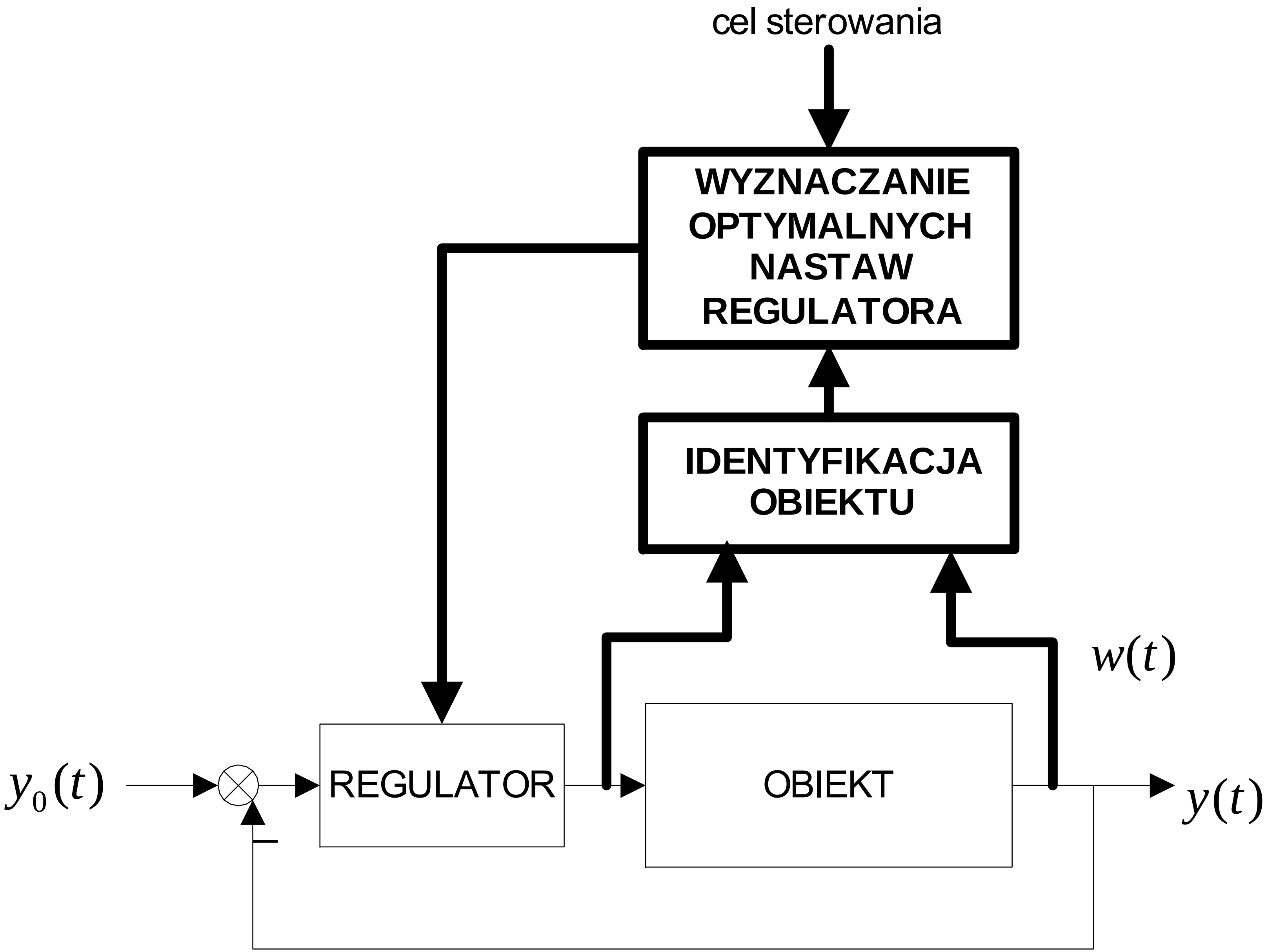
$$K(s) = \tfrac{1}{s+1} \to k(t) = e^{-t} \to k(nT) = e^{-nT} \to \widehat{K}(z) = \mathcal{Z}\left\{e^{-nT}\right\} = \tfrac{z}{z-e^{-T}}$$
$$\to \lambda(t) = 1 - e^{-t} \to \lambda(nT) = \mathbf{1}_n - nT \to \cancel{\overline{K}(z) = \tfrac{z-1}{z}T\mathcal{Z}\{\mathbf{1}_n - nT\} = \tfrac{z-1}{z}\left(\tfrac{z}{z-1} - \tfrac{Tz}{(z-1)^2}\right) =}$$
$$\cancel{\tfrac{z-1}{z}\tfrac{z(z-1)-Tz}{(z-1)^2} = \tfrac{(z-1)-T}{(z-1)}}$$

#07a

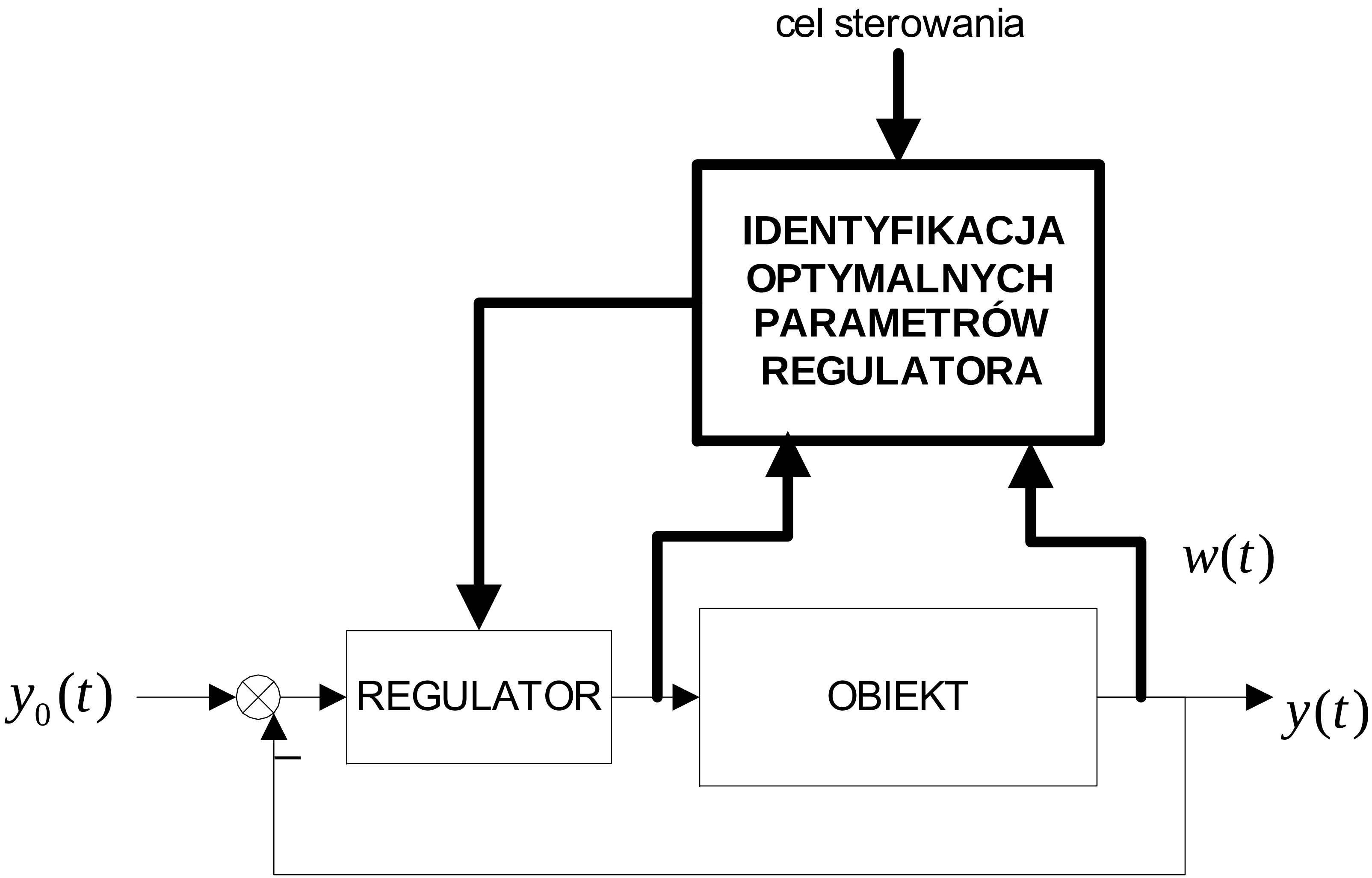
Sterowanie adaptacyjne



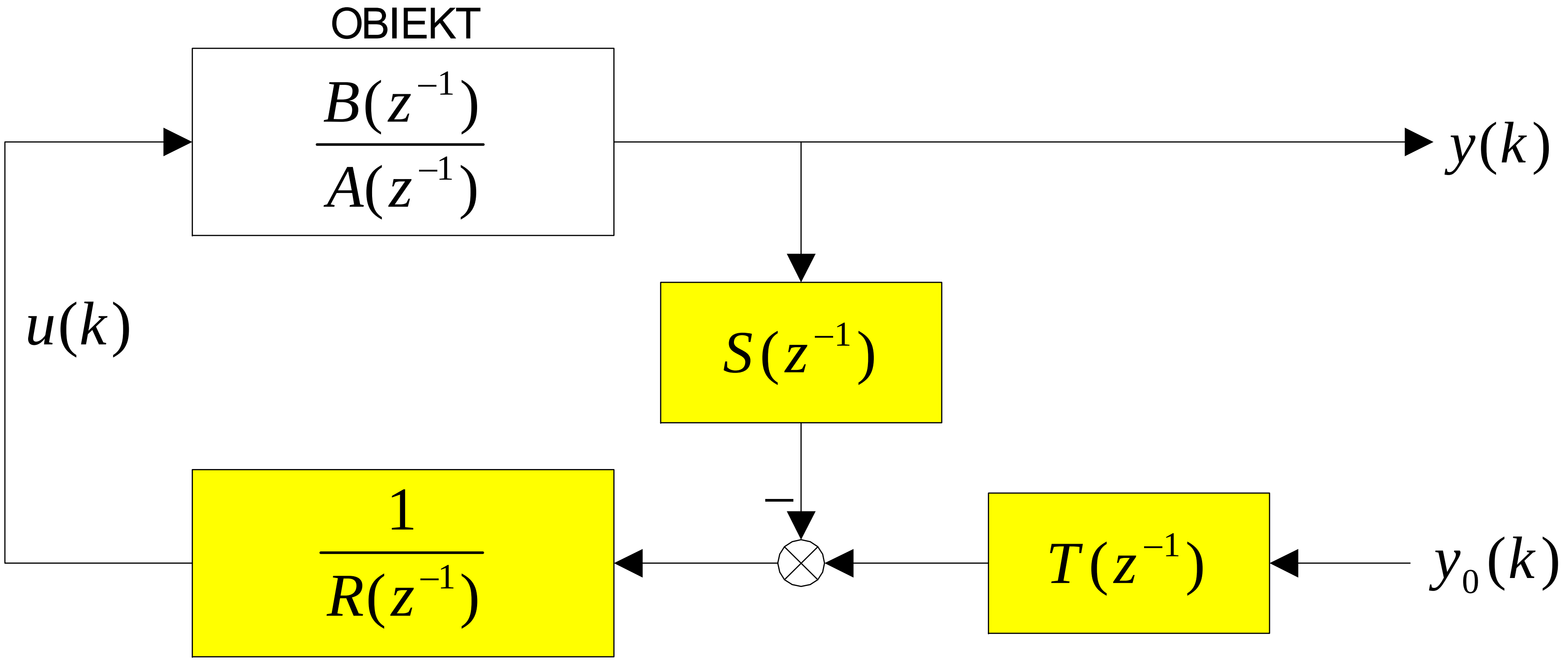
Adaptacja na podstawie zmiennej wiodącej



Pośrednia regulacja adaptacyjna



Bezpośrednia regulacja adaptacyjna



Układ automatycznej regulacji

Opis obiektu

$$A(z^{-1})y_k = B(z^{-1})u_k$$

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + ... + a_{nA} z^{-nA} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_{nB} z^{-nB} \end{aligned}$$

niestacjonarność

$$a_1(k), ..., a_{nA}(k), b_0(k), b_1(k), ..., b_{nB}(k)$$

Opis regulatora

$$R(z^{-1})u_k = -S(z^{-1})y_k + T(z^{-1})y_{0,k}$$

$$\begin{aligned} R(z^{-1}) &= r_0 + r_1 z^{-1} + ... + r_{nR} z^{-nR} \\ S(z^{-1}) &= s_0 + s_1 z^{-1} + ... + s_{nS} z^{-nS} \\ T(z^{-1}) &= t_0 + t_1 z^{-1} + ... + t_{nT} z^{-nT} \end{aligned}$$

Etapy projektowania regulatora

1. Przy znajomości modelu obiektu oraz przy zadanym celu regulacji rozwiązać tzw. *równanie diofantyczne*

$$DE(A, B, C, F, G) = 0 \tag{1}$$

wyliczając pomocnicze wielomiany $F(z^{-1})$ i $G(z^{-1})$. Postać równania (1) zależy od typu obiektu i celu regulacji.

2. Na podstawie wielomianów $F(z^{-1})$ i $G(z^{-1})$ dokonać syntezy regulatora, tzn. wyznaczyć $R(z^{-1})$, $S(z^{-1})$ i $T(z^{-1})$.

Przykład – Regulacja adaptacyjna z lokowaniem biegunów (ang. pole placement)

cel sterowania

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{\widetilde{A}(z^{-1})} y_0(k)$$

$\widetilde{A}(z^{-1})$ – wielomian o zadanych (znanych) współczynnikach lub pierwiastkach

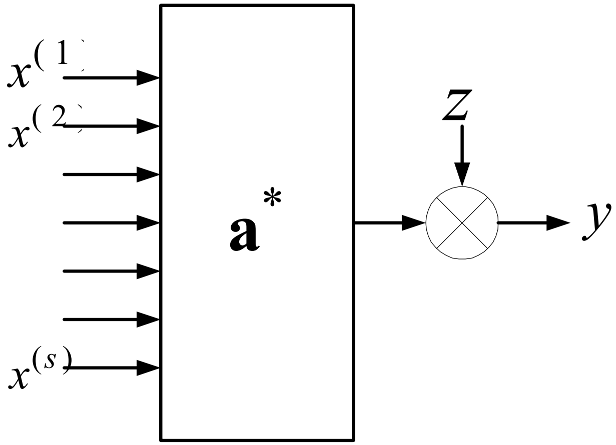
wzór na wielkość sterującą obiektu

$$u(k) = \frac{A(z^{-1})}{\widetilde{A}(z^{-1})} y_0(k)$$

Dowód – patrz [Niederliński,...]

1. Przedmiot identyfikacji

System



$$y \;=\; F^*(\mathbf{x}, z) = F(\mathbf{x}, z, \mathbf{a}^*), \text{ gdzie } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(s)} \end{bmatrix} \text{ – mierzone, } \mathbf{a}^* = \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_s^* \end{bmatrix} \text{ – zestaw współczynników konkretyzujących } F()$$

$F()$ – znane, $\mathbf{a}^*$ – nieznane

informacja aprioryczna

$$F^* \in \{F(\mathbf{x}, z, \mathbf{a});\; \mathbf{a} \in R^s\}$$

istnieje dokładnie jedno $\mathbf{a}^*$, takie że $F^*(\mathbf{x}, z) = F(\mathbf{x}, z, \mathbf{a}^*)$ dla każdej pary $(\mathbf{x}, z)$ (**identyfikowalność**)

informacja pomiarowa

$$\{\mathbf{x}_k, y_k\}_{k=1}^N$$

cel

$$\text{znaleźć przepis } \Psi() \text{ (algorytm identyfikacji)}$$

$$\Psi(\text{inf . aprioryczna, inf. pomiarowa}) = \mathbf{a}_N \sim \mathbf{a}^*$$

założenia o zakłóceniach

$$
\begin{aligned}
\text{jest addytywne, tj. } y &= F(\mathbf{x}, \mathbf{a}^*) + z \\
& \quad \{z_k\}_{k=1}^N \text{ – ciąg i.i.d.} \\
\mathbf{E}z &= 0 \\
var z &< \infty \\
& \quad z, \mathbf{x} \text{ – niezależne}
\end{aligned}
$$

natura procesów

$$z \text{ – losowe, } \mathbf{x} \text{ – deterministyczne lub losowe, } y \text{ –losowe, } \mathbf{a}_N \text{ –losowe}$$

własności $\mathbf{a}_N$

– praktyczne: wartości $\mathbf{E}\mathbf{a}_N[i]$ i $var\mathbf{a}_N[i]$

– asymptotyczne: fakt i typ zbieżności $\mathbf{a}_N \to \mathbf{a}^*$

2. Metoda najmniejszych kwadratów (Gauss 1809)

wskaźnik teoretyczny oceniający jakość dopasowania

$$Q_J(\mathbf{a}) = \mathbf{E}\{y - F(\mathbf{x}, \mathbf{a})\}^2 \to \min_{\mathbf{a}}$$

$$
\begin{aligned}
Q_J(\mathbf{a}) &= \mathbf{E}\{F(\mathbf{x}, \mathbf{a}^*) + z - F(\mathbf{x}, \mathbf{a})\}^2 = \mathbf{E}\{[F(\mathbf{x}, \mathbf{a}^*) - F(\mathbf{x}, \mathbf{a})]^2 + 2[F(\mathbf{x}, \mathbf{a}^*) - F(\mathbf{x}, \mathbf{a})]z + z^2\} = \\
&= \mathbf{E}\{F(\mathbf{x}, \mathbf{a}^*) - F(\mathbf{x}, \mathbf{a})\}^2 + var z
\end{aligned}
$$

konkluzja

$$\mathbf{a}^* = \arg\min_{\mathbf{a}} Q_J(\mathbf{a})$$

w praktyce nie jest możliwe obliczenie $Q_J(\mathbf{a})$ (brak znajomości odpowiednich rozkładów), proponuje się estymację wartości oczekiwanej za pomocą wartości średniej

$$\widehat{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\{y_k - F(\mathbf{x}_k, \mathbf{a})\}^2 \to \min_{\mathbf{a}}$$

uśredniane składniki $\{y_k - F(\mathbf{x}_k, \mathbf{a})\}^2$ tworzą ciąg i.i.d., zatem na podstawie *MPWL*

$$\widehat{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) \stackrel{p.1}{\rightarrow} Q_J(\mathbf{a}), \text{ gdy } N \rightarrow \infty$$

pytanie: czy prawdziwe jest następujące wnioskowanie

$$\widehat{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) \stackrel{p.1}{\rightarrow} Q_J(\mathbf{a}) \Longrightarrow \arg\min_{\mathbf{a}} \widehat{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) \stackrel{p.1}{\rightarrow} \arg\min_{\mathbf{a}} Q_J(\mathbf{a})$$

odpowiedź: tylko wtedy, gdy

$$\sup_{\mathbf{a}}(\widehat{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) - Q_J(\mathbf{a})) \stackrel{p.1}{\rightarrow} 0$$

3. Liniowy system statyczny *MIMO*

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{a}^{*T}\mathbf{x} + z = \mathbf{x}^T\mathbf{a}^* + z \\ y_k &= \mathbf{x}_k^T\mathbf{a}^* + z_k, \qquad k = 1, 2, ..., N \end{aligned}$$

opis macierzowo–wektorowy

$$X_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & .. & x_1^{(s)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & .. & x_2^{(s)} \\ .. & .. & .. & .. \\ x_N^{(1)} & x_N^{(2)} & .. & x_N^{(s)} \end{bmatrix}, \qquad Y_N = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \qquad Z_N = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$$

równanie pomiarów

$$Y_N = X_N\mathbf{a}^* + Z_N$$

wektor wyjść modelu

$$\overline{Y}_N = X_N\mathbf{a}$$

empiryczne kryterium jakości

$$\begin{aligned}\overline{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) &= \sum_{k=1}^{N}\{y_k - \mathbf{x}_k^T\mathbf{a}\}^2 = (Y_N - X_N\mathbf{a})^T(Y_N - X_N\mathbf{a}) = \|Y_N - X_N\mathbf{a}\|_2^2 = \ldots - \text{kwadrat normy euklidesowej} \\ \ldots &= (Y_N^T - \mathbf{a}^T X_N^T)(Y_N - X_N\mathbf{a}) = Y_N^T Y_N - \mathbf{a}^T X_N^T Y_N - Y_N^T X_N \mathbf{a} + \mathbf{a}^2 X_N^T X_N \to \min_{\mathbf{a}}\end{aligned}$$

gradient

$$\nabla_{\mathbf{a}}\overline{Q}_{J,N}(\mathbf{a}) = -2X_N^T Y_N + 2X_N^T X_N\mathbf{a} = 0$$

równanie normalne

$$X_N^T X_N \mathbf{a} = X_N^T Y_N$$

$\dim X_N^T X_N = s \times s$, $\dim X_N^T Y_N = s \times 1$, $\dim \mathbf{a} = s \times 1$

- kwestia isnienia rozwiązania

$$\mathrm{lin}\,col X_N^T X_N = \mathrm{lin}\,col X_N^T$$

- kwestia jednoznaczności rozwiązania

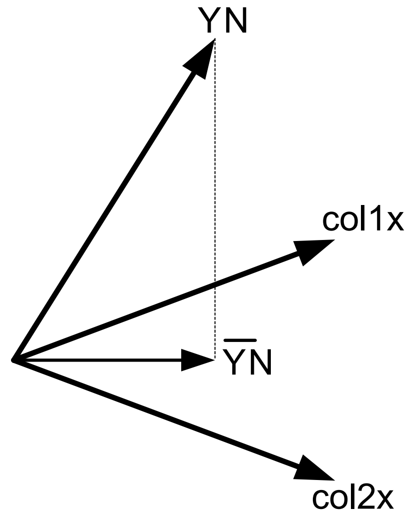
$$\begin{aligned}\det X_N^T X_N &> 0 \qquad (\neq 0) \\ \text{inaczej } rank X_N^T X_N &= s \text{ (nieosobliwa)}\end{aligned}$$

Fakt: $rank X_N^T X_N = rank X_N^T = rank X_N$.
Warunek jednoznaczności: $rank X_N = s$

1) $N \geqslant s$ – dostatecznie dużo pomiarów (warunek konieczny, ale nie wystarczający)
2) wśród N pomiarów musi się znaleźć s niezeleżnych liniowo wektorów
Gdy $rank X_N < s$, wtedy rozwiązanie równania normalnego nie jest jednoznaczne.

- kwestia nazwy równania (normalność-prostopadłość)

$$
\begin{aligned}
X_N^T(Y_N - X_N\mathbf{a}) &= 0 \\
X_N^T(Y_N - \overline{Y}_N) &= 0, \text{ gdzie } \overline{Y}_N \text{ – wyjście modelu o parametrach } \mathbf{a} \\
X_N^T &= [col_1x, col_2x, ..., col_sx] \\
\overline{Y}_N &= a_1col_1x + a_2col_2x + ... + a_scol_sx \text{ – liniowa kombinacja wektorów kolumnowych} \\
\text{wniosek} &: \ \overline{Y}_N \in \text{lin}col X_N^T \\
\text{natomiast w ogólności} &: \ Y_N \notin \text{lin}col X_N^T
\end{aligned}
$$



$$X_N^T(Y_N - \overline{Y}_N) = 0 \Rightarrow (col_xi)^T(Y_N - \overline{Y}_N) = 0 \text{ dla każdego } i = 1, 2, ..., s$$

wniosek: wektor różnicy $Y_N - \overline{Y}_N$ jest prostopadły do każdej z kolumn col_xi (rzut prostopadły jest "najkrótszy")

1. Identyfikacja liniowych systemów dynamicznych z czasem dyskretnym

$$x_k + \alpha_1 x_{k-1} + ... + \alpha_n x_{k-n} = \beta_0 u_k + \beta_1 u_{k-1} + ... + \beta_m u_{k-m}, \tag{1}$$

gdzie wartości rzędów n i m są znane.
Po wprowadzeniu operatora $q = z^{-1}$ przesuwającego wstecz (tzn. $qx_k = x_{k-1}$, $q^2 x_k = x_{k-2}$ itd.) oraz wielomianów

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + ... + \alpha_n q^n, \\ B(q) &= \beta_0 + \beta_1 q + ... + \beta_m q^m, \end{aligned}$$

równanie (1) upraszcza się do postaci

$$A(q)x_k = B(q)u_k \qquad \rightarrow \qquad x_k = \frac{B(q)}{A(q)} u_k.$$

2. Identyfikacja w warunkach bez zakłóceń pomiarowych

$$\theta = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_m)^T$$

$$r_k = (-x_{k-1}, -x_{k-2}, ..., -x_{k-n}, u_k, u_{k-1}, ..., u_{k-m})^T,$$

$$x_k = r_k^T \theta.$$

Nieznane parametry zawarte w wektorze θ identyfikuje się na podstawie par pomiarów (u_k, x_k).
Zapiszmy

$$R_N = \begin{bmatrix} r_1^T \\ r_2^T \\ \vdots \\ \vdots \\ r_N^T \end{bmatrix}, \qquad X_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}.$$

$$X_N = R_N\theta, \tag{2}$$

$$R_N^T X_N = R_N^T R_N \theta, \qquad\qquad (\theta \text{ -- niewiadome}), \tag{3}$$

warunek jednoznaczności rozwiązania

$$\det R_N^T R_N \neq 0$$

$$\mathrm{rank} R_N = \dim\theta.$$

warunek konieczny

$$N \geq \dim\theta. \tag{4}$$

$$\theta = (R_N^T R_N)^{-1} R_N^T X_N.$$

3. Identyfikacja w obecności zakłóceń pomiarowych

Cel: estymacja wektora parametrów $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta_0, \beta_1, ..., \beta_m)^T$ na podstawie pomiarów we–wy $\{(u_k, y_k)\}_{k=1}^N$, gdzie $y_k = x_k + \varepsilon_k$. Do prawdziwego (niedostępnego dla pomiarów) wyjścia obiektu x_k dodają się przypadowe zakłócenia ε_k

- o zerowej wartości oczekiwanej $\mathbf{E}\varepsilon_k = 0$,
- skończonej wariancji $var\varepsilon_k < \infty$,
- niezależne od procesu wejściowego u_k

Zapisujemy

$$x_k = y_k - \varepsilon_k = \frac{B(q)}{A(q)} u_k \qquad\qquad / \cdot A(q)$$

i otrzymujemy równanie różnicowe o zmiennych y i u

$$A(q)y_k = B(q)u_k + z_k.$$

$$z_k = A(q)\varepsilon_k = \varepsilon_k + \alpha_1\varepsilon_{k-1} + \alpha_2\varepsilon_{k-2} + ... + \alpha_n\varepsilon_{k-n},$$

z_k nie jest szumem białym, gdyż jego autokorelacja dla $|\tau| \leq n$ jest niezerowa

$$\mathbf{E}z_k z_{k-\tau} \neq 0.$$

Po wprowadzeniu rzeczywistego regresora (uogólnionego wektora wejść)

$$\phi_k = (-y_{k-1}, -y_{k-2}, ..., -y_{k-n}, u_k, u_{k-1}, ..., u_{k-m})^T$$

oraz macierzy uogólnionych wejść, wektora wyjść i zakłóceń

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_N^T \end{bmatrix}, \qquad Y_N = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \qquad Z_N = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix},$$

równanie pomiarów przyjmuje postać

$$Y_N = \Phi_N\theta + Z_N,$$

gdzie θ jest niewiadomym wektorem stałych parametrów, a Z_N – nieznanym zakłóceniem losowym.

$$Y_N = \Phi_N\theta \text{ – w ogólności sprzeczny}$$

estymator metodą najmniejszych kwadratów

$$\widehat{\theta} = (\Phi_N^T\Phi_N)^{-1}\Phi_N^T Y_N,$$

błąd estymacji

$$\begin{aligned}\Delta &= \widehat{\theta} - \theta = (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T Y_N - \theta = \\ &= (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T \Phi_N \theta + (\Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \Phi_N^T Z_N - \theta = \\ &= (\frac{1}{N} \Phi_N^T \Phi_N)^{-1} \frac{1}{N} \Phi_N^T Z_N.\end{aligned}$$

Ponieważ proces wyjściowy jest ergodyczny

$$\frac{1}{N} \Phi_N^T Z_N \to \mathbf{E} \phi_k z_k = \mathbf{E} \begin{bmatrix} -y_{k-1} \\ \vdots \\ -y_{k-n} \\ u_k \\ u_{k-1} \\ \vdots \\ u_{k-m} \end{bmatrix} z_k$$

z prawdopodobieństwem 1, gdy $N \to \infty$. Skorelowanie procesu $\{z_k\}$ powoduje, że

$$\mathbf{E} \phi_k z_k = \begin{bmatrix} -\mathbf{E} y_{k-1} z_k \\ \vdots \\ -\mathbf{E} y_{k-n} z_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Zwiększanie liczby pomiarów nie doprowadzi nas do prawdziwych wartości parametrów. W celu pokonania tej trudności, stosuje się techniki oparte na filtracji zakłóceń lub tzw. metodę zmiennych instrumentalnych

9.
Wersja rekurencyjna algorytmu najmniejszych kwadratów

wersja off-line (standardowa)

$$a_N = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T Y_N$$

wersja on-line (rekurencyjna)

$$a_N = f(a_{N-1}, x_N, y_N) = a_{N-1} + \delta(a_{N-1}, x_N, y_N)$$

odwracana macierz (w wersji off-line)

$$X_N^T X_N = \sum_{k=1}^{N} x_k x_k^T = \sum_{k=1}^{N-1} x_k x_k^T + x_N x_N^T = X_{N-1}^T X_{N-1} + x_N x_N^T$$

oznaczmy

$$P_N = (X_N^T X_N)^{-1}$$

$$cov(a_N) = P_N \sigma_z^2$$

możemy zapisać

$$\begin{aligned} a_N &= P_N X_N^T Y_N \\ a_{N-1} &= P_{N-1} X_{N-1}^T Y_{N-1} \end{aligned}$$

$$P_N = \left(P_{N-1}^{-1} + x_N x_N^T\right)^{-1}, \text{ gdzie } P_{N-1}^{-1} = X_{N-1}^T X_{N-1}$$

Lemat 1 *(o odwracaniu macierzy)*

$$\left(A + uu^T\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + u^T A^{-1} u} A^{-1} u u^T A^{-1}$$

Przyjmując $A = P_{N-1}^{-1}$ i $u = x_N$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} P_N &= P_{N-1} - \frac{1}{1 + x_N^T P_{N-1} x_N} P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1} = P_{N-1} - \varkappa_N P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1} \\ \text{gdzie } \varkappa_N &= \frac{1}{1 + x_N^T P_{N-1} x_N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_N &= \left(P_{N-1} - \varkappa_N P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1}\right)\left(X_{N-1}^T Y_{N-1} + x_N y_N\right) = \\ &= P_{N-1} X_{N-1}^T Y_{N-1} + P_{N-1} x_N y_N - [\varkappa_N P_{N-1} x_N](x_N^T P_{N-1} X_{N-1}^T Y_{N-1} - x_N^T P_{N-1} x_N y_N) = \\ &= a_{N-1} + [\varkappa_N P_{N-1} x_N]\{\frac{1}{\varkappa_N} y_N - x_N^T a_{N-1} - x_N^T P_{N-1} x_N y_N\} \end{aligned}$$

wstawiając

$$\frac{1}{\varkappa_N} = 1 + x_N^T P_{N-1} x_N$$

otrzymujemy

$$\{...\} = y_N + x_N^T P_{N-1} x_N y_N - x_N^T a_{N-1} - x_N^T P_{N-1} x_N y_N = y_N - x_N^T a_{N-1}$$

wniosek

$$\begin{aligned} a_N &= a_{N-1} + \varkappa_N P_{N-1} x_N (y_N - x_N^T a_{N-1}) \\ P_N &= P_{N-1} - \varkappa_N P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1} \quad / \cdot x_N \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} P_N x_N &= P_{N-1} x_N - \varkappa_N P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1} x_N = \varkappa_N P_{N-1} x_N \{\frac{1}{\varkappa_N} - x_N^T P_{N-1} x_N\} \\ \{...\} &= 1 \\ P_N x_N &= \varkappa_N P_{N-1} x_N \end{aligned}$$

wstawiamy do (1)

$$
\begin{aligned}
a_N &= a_{N-1} + P_N x_N (y_N - x_N^T a_{N-1}) \\
P_N &= P_{N-1} - \frac{P_{N-1} x_N x_N^T P_{N-1}}{1 + x_N^T P_{N-1} x_N}
\end{aligned}
$$

warunki początkowe

$$a_0 = 0,\ P_0 = diag[10^3 \div 10^5]$$

zaleta: algorytm pracuje bez odwracania macierzy

Modele obiektów z czasem dyskretnym i ich identyfikacja

Grzegorz Mzyk

Zakład Sterowania i Optymalizacji
Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki
Politechnika Wrocławska

2008

Plan

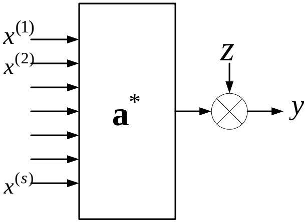
Typowe modele

– *liniowe* obiekty *statyczne* typu *MISO*

– *liniowe* obiekty *dynamiczne* typu *SISO (MA i ARMA)*

Metoda najmniejszych kwadratów (LS)

Liniowy obiekt statyczny (1)



Rysunek: Liniowy obiekt statyczny typu *MISO*

$$\mathbf{a}^* = \begin{bmatrix} a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_s^* \end{bmatrix}$$

Założenia:

$\mathbf{E}z = 0$, $\operatorname{var} z < \infty$

$x^{(i)}$, z – niezależne

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & .. & x_1^{(s)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & .. & x_2^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^{(1)} & x_N^{(2)} & .. & x_N^{(s)} \end{bmatrix}$$

Liniowy obiekt statyczny (2)

$$\mathbf{Y}_N = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \mathbf{Z}_N = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$$

Równanie pomiarów

$$\mathbf{Y}_N = \mathbf{X}_N \mathbf{a}^* + \mathbf{Z}_N$$

Model

$$\overline{\mathbf{Y}}_N(\mathbf{a}) = \mathbf{X}_N \mathbf{a}$$

Istota metody najmniejszych kwadratów

$$\left\| \mathbf{Y}_N - \overline{\mathbf{Y}}_N(\mathbf{a}) \right\|_2^2 \longrightarrow \min_{\mathbf{a}}$$

Równania normalne

$$\mathbf{X}_N^T \mathbf{X}_N \mathbf{a} = \mathbf{X}_N^T \mathbf{Y}_N$$

Warunek jednoznaczności rozwiązania

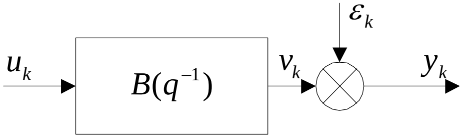
$$\mathrm{rank} \mathbf{X}_N = s$$

Estymator NK

$$\widehat{\mathbf{a}}_N = \left(\mathbf{X}_N^T \mathbf{X}_N \right)^{-1} \mathbf{X}_N^T \mathbf{Y}_N = \mathbf{X}_N^+ \mathbf{Y}_N$$

$$\widehat{\mathbf{a}}_N \xrightarrow{p.1} \mathbf{a}^*, \text{ gdy } N \longrightarrow \infty$$

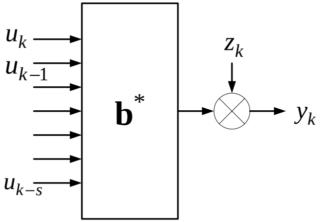
Liniowy obiekt dynamiczny typu MA(s) (1)



Rysunek: Model *MA*

$$v_k = b_0^* u_k + \ldots + b_s^* u_{k-s}$$
$$y_k = v_k + \varepsilon_k$$
$$y_k = b_0^* u_k + \ldots + b_s^* u_{k-s} + z_k$$
$$z_k = \varepsilon_k$$

Liniowy obiekt dynamiczny typu MA(s)



Rysunek: Model *MA*

$$\mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} b_0^* \\ b_1^* \\ \vdots \\ b_s^* \end{bmatrix}$$

Założenia:

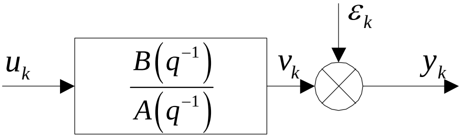
$\mathbf{E}z = 0$, $\mathrm{var} z < \infty$

$\{u_k\}$, $\{z_k\}$ – niezależne

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \vdots \\ \phi_N^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_0 & .. & u_{1-s} \\ u_2 & u_1 & .. & u_{2-s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_N & u_{N-1} & .. & u_{N-s} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_N = \Phi_N \mathbf{b}^* + \mathbf{Z}_N \qquad \widehat{\mathbf{b}}_N = \left(\Phi_N^T \Phi_N\right)^{-1} \Phi_N^T \mathbf{Y}_N$$

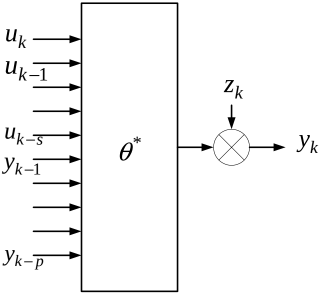
Liniowy obiekt dynamiczny typu ARMA(s,p) (1)



Rysunek: Model *ARMA*

$$
\begin{aligned}
v_k &= b_0^* u_k + \ldots + b_s^* u_{k-s} + a_1^* v_{k-1} + \ldots. + a_p^* v_{k-p} \\
y_k &= v_k + \varepsilon_k \\
y_k &= b_0^* u_k + \ldots + b_s^* u_{k-s} + a_1^* y_{k-1} + \ldots. + a_p^* y_{k-p} + z_k \\
z_k &= \varepsilon_k - a_1^* \varepsilon_{k-1} - \ldots - a_p^* \varepsilon_{k-p}
\end{aligned}
$$

Liniowy obiekt dynamiczny typu ARMA(s,p) (2)



Rysunek: Model *ARMA*

$$\theta^* = \begin{bmatrix} b_0^* \\ b_1^* \\ \vdots \\ b_s^* \\ a_1^* \\ a_2^* \\ \vdots \\ a_p^* \end{bmatrix}$$

$\mathbf{E}z = 0$, $\mathrm{var}z < \infty$

u_{k-i}, z_k – niezależne

y_{k-i}, z_k – zależne, gdy $\{z_k\}$ jest procesem skorelowanym

Liniowy obiekt dynamiczny typu ARMA(s,p) (3)

$$\Phi_N = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \vdots \\ \phi_N^T \end{bmatrix} =$$

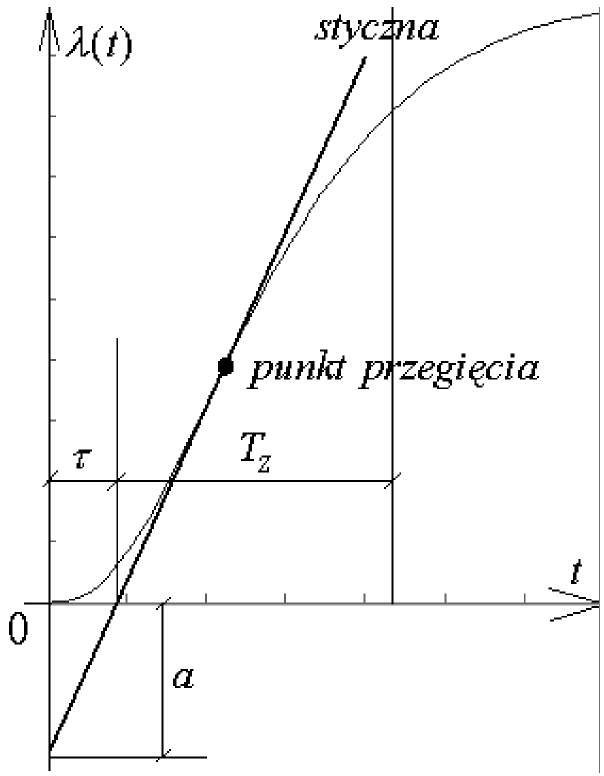
$$\begin{bmatrix} u_1 & u_0 & \cdots & u_{1-s} & y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{1-p} \\ u_2 & u_1 & \cdots & u_{2-s} & y_1 & y_0 & \cdots & y_{2-p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_N & u_{N-1} & \cdots & u_{N-s} & y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_{N-p} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}_N = \Phi_N \theta^* + \mathbf{Z}_N \qquad \widehat{\theta}_N = \left(\Phi_N^T \Phi_N\right)^{-1} \Phi_N^T \mathbf{Y}_N$$

#08
Metody doboru nastaw regulatorów PID

1. Obiekty inercyjne wyższego rzędu (typ 1)

$$K_{O1}(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)...(T_m s + 1)}$$

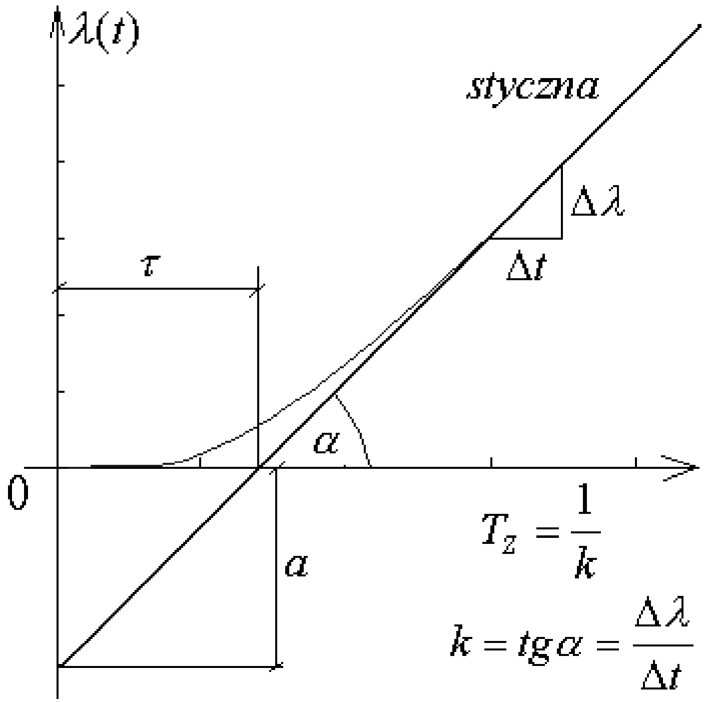


Aproksymator

$$K^{(1)}_{\mathrm{apr}}(s) = \frac{k e^{-s\tau}}{T_Z s + 1}$$

2. Rzeczywiste układy całkujące (typ 2)

$$K_{O2}(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)...(T_m s + 1)}$$



Aproksymator

$$K_{\text{apr}}^{(2)}(s) = \frac{ke^{-s\tau}}{s}$$

3. Metody Zieglera-Nicholsa

I metoda Z-N

- uniwersalna (dla obiektów typu 1 i 2)
- przybliżona (wymagane jest wyznaczenie odpowiedzi skokowej i dokonanie aproksymacji obiektu)

Typ regulatora	k_p	T_i	T_d
P	$1/a$	∞	0
PI	$0,9/a$	3τ	0
PID	$1,2/a$	2τ	$\tau/2$

II metoda Z-N

- tylko dla obiektów, dla których *linie pierwiastkowe* przecinają oś urojoną $j\omega$
- dokładniejsza niż I, wymaga jednak doprowadzenia obiektu do granicy stabilności

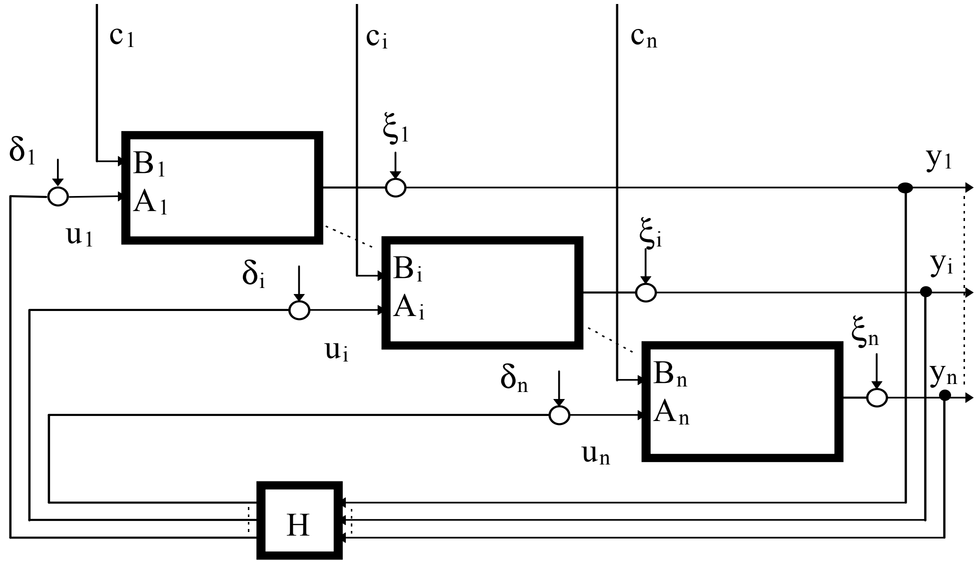
Typ regulatora	k_p	T_i	T_d
P	$0,5k_{P,\text{kryt}}$	∞	0
PI	$0,45k_{P,\text{kryt}}$	$T_{\text{osc}}/1,2$	0
PID	$0,6k_{P,\text{kryt}}$	$T_{\text{osc}}/2$	$T_{\text{osc}}/8$

#09

Systemy o złożonej strukturze

- system składa się z wielu elementów, obiekty (podsystemy) wchodzące w skład systemu są ze sobą połączone i wzajemnie od siebie zależne
- mogą wystąpić ograniczenia w dostępności pomiarowej sygnałów
- identyfikowalność pojedynczych obiektów prostych wchodzących w skład systemu nie implikuje identyfikowalności całego systemu (w szczególności, że identyfikowalność parametrów systemu złożonego w warunkach deterministycznych zależy m.in. od wartości parametrów poszczególnych obiektów (podsystemów), których nie znamy oraz od struktury połączeniowej systemu)
- ewentualne sprzężenia zwrotne przenoszą zakłócenia wyjściowe na wejścia

Obiekt identyfikacji



$$y = \left(y_1^T, \ldots, y_n^T\right)^T \qquad u = \left(u_1^T, \ldots, u_n^T\right)^T \qquad c = \left(c_1^T, \ldots, c_n^T\right)^T$$

$$A = diag\left(A_1, \ldots, A_n\right) \qquad B = diag\left(B_1, \ldots, B_n\right)$$

$$H = \left(H_1^T, \ldots, H_n^T\right)^T$$

$$\delta = \left(\delta_1^T, \ldots, \delta_n^T\right)^T \qquad \xi = \left(\xi_1^T, \ldots, \xi_n^T\right)^T$$

Opis formalny systemu

$$y = A\,u + B\,c + \xi$$

$$u = H\,y + \delta$$

Założenia

Z1: macierz połączeń H (struktura systemu) jest znana;

Z2: system jest dobrze określony, tzn. dla każdej wartości pobudzenia c i każdej wartości zakłóceń (δ, ξ) istnieje dokładnie jedna wartość wyjścia y;

Z3: wartości c i y w dowolnym momencie mogą być zmierzone;

Z4: system przy braku zakłóceń byłby identyfikowalny;

Z5: zakłócenia ξ i δ mają zerowe wartości oczekiwane i są niezależne od siebie oraz od pobudzeń c;

Z6: wartości c, δ i ξ są takie, że uogólniona macierz pobudzeń

$$E_N = \left[e^1, \ldots, e^N\right]$$

gdzie $e = (c^T, \theta^T)^T$ oraz $\theta = A\delta + \xi$ jest zagregowanym zakłóceniem przeniesionym na wyjście systemu, jest - dla $N \geq dim\, e$ - pełnego rzędu z prawdopodobieństwem 1, tj. $rank\, E_N = dim\, e$.

Cel

odkrycie prawdziwych wartości współczynników w liniowych opisach każdego obiektu wchodzącego w skład systemu (zawartych w macierzach A i B) na podstawie pomiarów c^k i y^k (k=1..N) uzyskanych w eksperymencie.

Opis kompaktowy (równania pomiarów)

$$y = K c + G \theta$$

gdzie

$$G = \left(I - A H\right)^{-1} \qquad K = G B$$

Estymacja metodą najmniejszych kwadratów

$$V_{iN} = \left(A_i, B_i\right) W_{iN} + \Theta_{iN} \qquad \text{gdzie } \Theta_{iN} = \left(\theta_i^1, \ldots, \theta_i^N\right)$$

$$V_{iN} W_{iN}^T = \left(A_i, B_i\right) W_{iN} W_{iN}^T + \Theta_{iN} W_{iN}^T$$

$$\boxed{\left(A_{iN}, B_{iN}\right) = V_{iN} W_{iN}^T \left(W_{iN} W_{iN}^T\right)^{-1}}$$

gdzie

$$V_{iN} = \left[v_i^1, \ldots, v_i^N\right] \qquad W_{iN} = \left[w_i^1, \ldots, w_i^N\right]$$

$w_i^k = \left(\tilde{u}_i^{k\,T}, c_i^{k\,T}\right)^T$ $\quad \tilde{u}_i^k = H_i v^k$ $\quad v^k$ jest wynikiem pomiaru wyjścia y^k

Przypadek 1) brak zakłóceń pomiarowych: $v^k = y^k$,

Przypadek 2) obecność zakłóceń pomiarowych: $v^k = y^k + \eta^k$.

Zasadnicza wada estymatora

asymptotycznie obciążony

$$\lim_{N \to \infty} \mathbf{E}\left(A_{iN}, B_{iN}\right) \neq (A_i, B_i)$$

przyczyna: występowanie strukturalnego sprzężenia zwrotnego w systemie, a co za tym idzie – skorelowanie zachodzące pomiędzy zakłóceniami (zagregowanymi) θ_i, działającymi na wyjścia podsystemów, a wejściami interakcyjnymi u_i, które zależą od wyjść systemu.

Metoda zmiennych instrumentalnych (Instrumental Variables)

$$\boxed{\left(A_{iN}^{IV}, B_{iN}^{IV}\right) = V_{iN}\Psi_{iN}^{T}\left(W_{iN}\Psi_{iN}^{T}\right)^{-1}}$$

W1: wymiarowość Ψ_{iN} jest identyczna jak wymiarowość macierzy W_{iN}:

$$\Psi_{iN} = \left[\psi_i^1, \ldots, \psi_i^N\right] \qquad \psi_i^k = \left({\psi_{i,1}^k}^T, {\psi_{i,2}^k}^T\right)^T$$

gdzie

$$\dim \psi_{i,1} = \dim u_i$$

$$\dim \psi_{i,2} = \dim c_i$$

W2: macierz $W_{iN}{\Psi_{iN}}^T$ jest odwracalna (nieosobliwa);

W3: elementy $\psi^1_{i,1},\ldots,\psi^N_{i,1}$ i $\psi^1_{i,2},\ldots,\psi^N_{i,2}$ macierzy Ψ_{iN} są asymptotycznie silnie *skorelowane* z wejściami zewnętrznymi $c^1, \ldots, c^N$;

W4: elementy $\psi^1_{i,1},\ldots,\psi^N_{i,1}$ i $\psi^1_{i,2},\ldots,\psi^N_{i,2}$ macierzy Ψ_{iN} są asymptotycznie *nieskorelowane* z zakłóceniami $\theta^1,\ldots, \theta^N$ działającymi na wyjścia podsystemów.

Konstrukcja zmiennych pomocniczych

Oznaczmy przez L_i macierz formującą Ψ_{iN} z macierzy pobudzeń zewnętrznych systemu E_N

$$\Psi_{iN} = L_i E_N$$

Postulat (względu na warunki W3 i W4 oraz niedostępność pomiarową wektora θ)

$$L_i = \begin{bmatrix} \Gamma_i & 0 \\ I_i & 0 \end{bmatrix}$$

Γ_i jest macierzą o wymiarze $dim\ u_i \times dim\ c$, o której zakładamy, że jest pełnego rzędu
I_i jest macierzą blokową o wymiarach $dim\ c_i \times dim\ c$, z jednostkowym i-tym blokiem kolumnowym:

$$I_i = \left[0,\ldots,0,I,0,\ldots,0\right]$$

Własności asymptotyczne (przypadek braku zakłóceń pomiarowych)

$$V_{iN} = \left(A_i, B_i\right)W_{iN} + \Theta_{iN} \quad /\cdot\, \Psi_{iN}^T$$

błąd estymacji

$$\left(A_{iN}^{IV}, B_{iN}^{IV}\right) - \left(A_i, B_i\right) = \Theta_{iN}\Psi_{iN}^T\left(W_{iN}\Psi_{iN}^T\right)^{-1} \qquad \Delta_N = {}^1\!/_N\,\Theta_{iN}\Psi_{iN}^T\left({}^1\!/_N\,W_{iN}\Psi_{iN}^T\right)^{-1}$$

zapiszmy

$$W_{iN} = F_i E_N \qquad \text{,gdzie} \qquad F_i = \begin{bmatrix} H_i K & H_i G \\ I_i & 0 \end{bmatrix}$$

na podstawie warunków W1÷W4 oraz mocnego prawa wielkich liczb otrzymujemy:

$${}^1\!/_N\,\Theta_{iN}\Psi_{iN}^T - p.1 \rightarrow \left[0 \quad : \quad 0\right]$$

$${}^1\!/_N\,W_{iN}\Psi_{iN}^T - p.1 \rightarrow \begin{bmatrix} \Sigma^i_{\tilde{u},\psi_1} & \Sigma^i_{\tilde{u},c} \\ \Sigma^i_{c,\psi_2} & \Sigma^i_{c,c} \end{bmatrix}$$

gdzie $\Sigma^i_{x,y}$ oznacza macierz korelacji wzajemnej pomiędzy wektorami losowymi x_i i y_i
Wniosek

$$\left(A_{iN}^{IV}, B_{iN}^{IV}\right) - p.1 \rightarrow \left(A_i, B_i\right)$$

Optymalna generacja zmiennych instrumentalnych

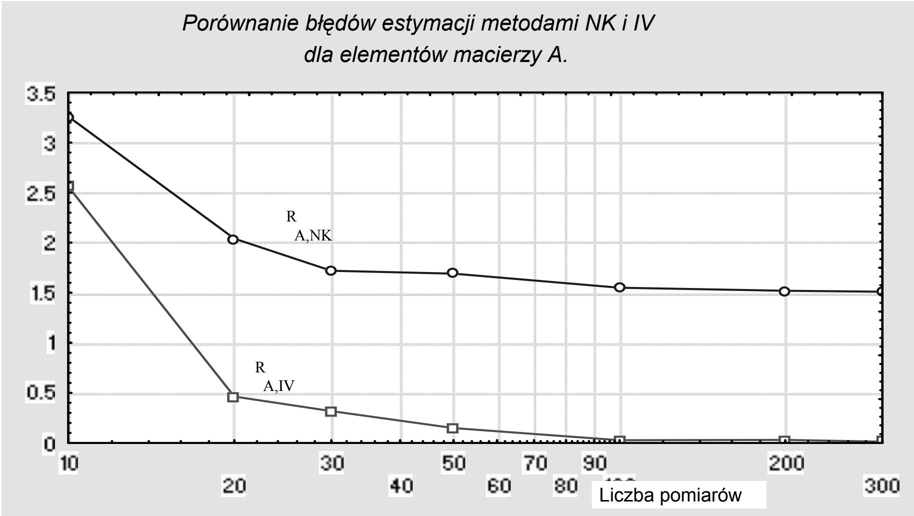
$$\|\mathrm{E}\{\Delta_N{}^T\Delta_N\}\|_2 \to \min$$

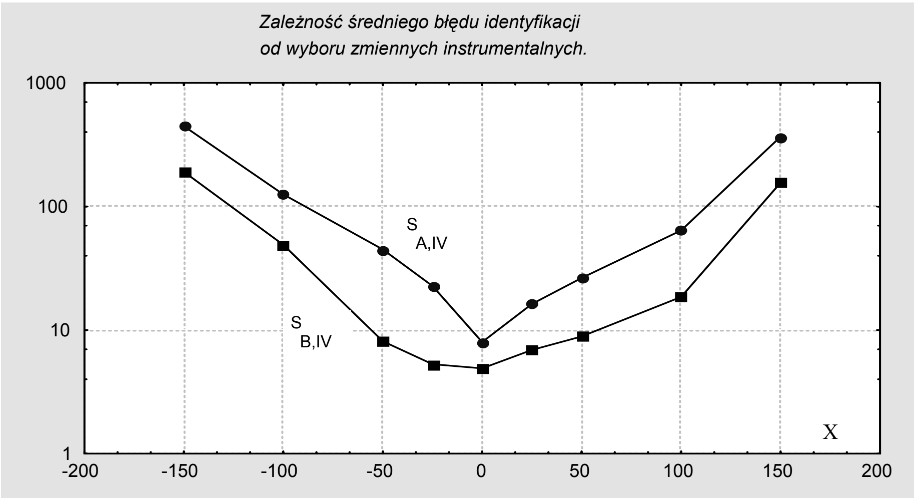
$$\psi_{i,1}^{k}{}^{*} = \mathrm{E}\left(u_i^k \,|\, c = c^k\right) = H_i K c^k$$

$$\psi_{i,2}^{k}{}^{*} = c_i^k \qquad\qquad k=1..N \qquad (9)$$

Uwaga: macierz K jest nieznana

Wyniki eksperymentów





#09b

Przykład obiektu pracującego w systemie złożonym

1. Reaktor o idealnym zmieszaniu

Wielkości wejściowe:

F_A $[kg/s]$ – natężenie dopływu materiału A o temperaturze T_A

F_B $[kg/s]$ – natężenie dopływu materiału B o temperaturze T_B

H $[J/s]$ – strumień energii cieplnej

Wielkość wyjściowa:

F_D $[kg/s]$ – strumień materiału wypływającego z reaktora

Jako współrzędne stanu przyjmujemy:

W $[kg]$ – załadowanie reaktora

C_A $[-]$ – stężenie składnika A w reaktorze

T $[K]$ – temparatura mieszaniny w reaktorze

Ograniczenia:

$0 \leqslant W \leqslant W_{\max}$, gdzie $W_{\max}$ – pojemność reaktora

$T \leqslant T_{\max}$, gdzie $T_{\max}$ – maksymalna dopuszczalna temperatura

Ułożenie równań stanu (zmienne stanu to W, C_A i T):

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &= F_A + F_B - F_D \text{ – ogólny bilans masy} \\
\frac{d(WC_A)}{dt} &= F_A - C_A F_D - W C_A k(T) \text{ – bilans masy dla składnika } A \\
\frac{d(cWT)}{dt} &= cF_A T_A + cF_B T_B - cF_D T + H - hWC_A k(T)
\end{aligned}$$

gdzie

$k(T)$ – stała prędkości reakcji

c $[J/kgK]$ – ciepło właściwe (identyczne dla wszystkich substancji)

h $[J/kg]$ – ciepło reakcji

Ze wzoru na pochodną iloczynu mamy:

$$\frac{d(WC_A)}{dt} = W\frac{dC_A}{dt} + C_A\frac{dW}{dt}$$

Równania stanu

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt} &= F_A + F_B - F_D \\
\frac{dC_A}{dt} &= \frac{1 - C_A}{W} F_A - \frac{C_A}{W} F_B - C_A k(T) \\
\frac{dT}{dt} &= \frac{T_A - T}{W} F_A + \frac{T_B - T}{W} F_B + \frac{H}{cW} - \frac{h C_A k(T)}{c}
\end{aligned}$$

Sterowanie wielopoziomowe w systemach złożonych – identyfikacja i optymalizacja

Grzegorz Mzyk

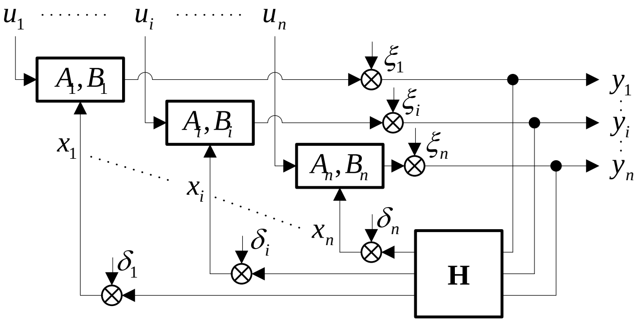
Politechnika Wrocławska, Wydział Elektroniki

23 lutego 2015

Plan wykładu

1. Opis systemu złożonego, sformułowanie problemu
2. Warunki identyfikowalności
3. Metody identyfikacji
4. Optymalizacja dwuetapowa
5. Procedury koordynacji
6. Podsumowanie, literatura

Opis systemu



System złożony

Opis systemu

$$y_i = A_i x_i + B_i u_i + \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T \\ x &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \\ y &= (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T \end{aligned}$$

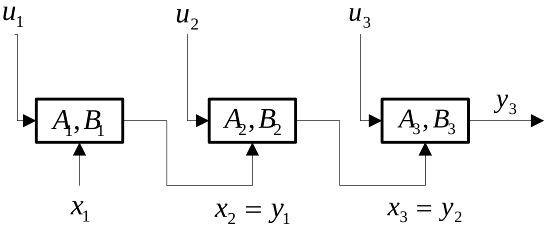
$$x_i = H_i y + \delta_i$$

Opis systemu

$$
\begin{aligned}
A &= \mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_n) \\
B &= \mathrm{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_n) \\
H &= \left(H_1^T, H_2^T, \ldots, H_n^T\right)^T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
y = Ax + Bu + \xi \\
x = Hy + \delta
\end{cases}
$$

Przykład – system kaskadowy



System kaskadowy

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

Identyfikowalność

System kaskadowy

Twierdzenie

Element i-ty jest identyfikowalny w złożonym systemie kaskadowym wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$rank\left[A_{i-1}A_{i-2}...A_1,\ A_{i-1}A_{i-2}...B_1,\ ...,\ A_{i-1}B_{i-2},\ B_{i-1}\right] = \dim x_i$$

[Hasiewicz, *Int. J. Sys. Sci.*, 1987]

Identyfikowalność

System o dowolnej strukturze połączeń

Twierdzenie

Element i-ty jest identyfikowalny w złożonym systemie o dowolnej strukturze połączeń wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$rank H_i \left[K^{(1)}, ..., K^{(i-1)}, K^{(i+1)}, ..., K^{(n)} \right] = \dim x_i,$$

gdzie $K^{(i)}$ *oznacza i-ty blok kolumnowy macierzy* K*.*

[Hasiewicz, *Int. J. Sys. Sci.*, 1987]

Metoda najmniejszych kwadratów

$$
\begin{aligned}
Y_{iN} &= [y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \ldots, y_i^{(N)}] \\
W_{iN} &= [w_i^{(1)}, w_i^{(2)}, \ldots, w_i^{(N)}] \\
w_i &= (x_i, u_i)^T
\end{aligned}
$$

$$Y_{iN} = (A_i, B_i) W_{iN} + \xi_i$$

$$\widetilde{w}_i = (\widetilde{x}_i, u_i)^T, \qquad \widetilde{x}_i = H_i y = x_i - \delta_i$$

$$\widetilde{W}_{iN} = [\widetilde{w}_i^{(1)}, \widetilde{w}_i^{(2)}, \ldots, \widetilde{w}_i^{(N)}]$$

$$(\widehat{A}_i^{l.s.}, \widehat{B}_i^{l.s.}) = Y_{iN} \widetilde{W}_{iN}^T \left(\widetilde{W}_{iN} \widetilde{W}_{iN}^T \right)^{-1}$$

Metoda zmiennych instrumentalnych

$$(\widehat{A}_i^{l.s.}, \widehat{B}_i^{l.s.}) = Y_{iN} \widetilde{W}_{iN}^T \left(\widetilde{W}_{iN} \widetilde{W}_{iN}^T \right)^{-1}$$

$$(\widehat{A}_i^{i.v.}, \widehat{B}_i^{i.v.}) = Y_{iN} \Psi_{iN}^T \left(\widetilde{W}_{iN}^T \Psi_{iN}^T \right)^{-1},$$

$$\widetilde{W}_{iN} = [\widetilde{w}_i^{(1)}, \widetilde{w}_i^{(2)}, ..., \widetilde{w}_i^{(N)}]$$

$$\Psi_{iN} = [\psi_i^{(1)}, \psi_i^{(2)}, ..., \psi_i^{(N)}]$$

$$\psi_i^{(k)} = \left(\psi_{i,1}^{(k)}, \psi_{i,2}^{(k)} \right)^T .$$

optymalne instrumenty

$$\psi_i^* = \overline{w}_i = (\overline{x}_i, u_i)^T, \qquad \overline{x}_i = E(x_i | u) = H_i K u$$

Podejście globalne

$$\begin{cases} y = Ax + Bu + \xi \\ x = Hy + \delta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= A\left(Hy + \delta\right) + Bu + \xi, \\ \left(I - AH\right) y &= Bu + A\delta + \xi, \end{aligned}$$

$$y = Ku + G\theta$$

$$K = \left(I - AH\right)^{-1} B$$

przepis na sterowanie

$$u = K^{-1} y_{\dot{z}}$$

Podejście lokalne

decyzja lokalna o sterowaniu u_i (balansowanie)

$$y_{\dot{z},i} = a_i x_i + b_i u_i$$

$$x_i = H_i y_{\dot{z}}$$

przepis na sterowanie

$$u_i = \frac{y_{\dot{z},i} - a_i H_i y_{\dot{z}}}{b_i}$$

Funkcja celu i ograniczenia

ograniczenia

$$\begin{aligned} (u_i, x_i) &\in C_i \\ \sum_i r_i(u_i, x_i) &\leq r_0 \end{aligned}$$

lokalna funkcja celu

$$Q_i(u_i, x_i)$$

globalny wskaźnik jakości

$$\begin{aligned} Q &= \psi(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) \\ & \quad \psi() - \text{funkcja zachowująca porządek} \\ \text{np. } Q &= \sum_i Q_i \end{aligned}$$

Dwupoziomowa optymalizacja (dekompozycja zadania optymalizacji)

$$
\begin{aligned}
u &= \left(u^{(1)}, u^{(2)}\right) \\
& \quad u^{(1)} \text{ -- zmienne górnego poziomu (tzw. koordunujące)} \\
& \quad u^{(2)} \text{ -- zmienne dolnego poziomu} \\
\max_{u} Q(u) &= \max_{u^{(1)}} \left\{ \max_{u^{(2)}} Q\left(u^{(1)}, u^{(2)}\right) \right\}
\end{aligned}
$$

Procedury koordynacji
Metoda bezpośrednia

warstwa górna

$$
\begin{aligned}
Q &= \psi\left(Q_1(y_d, r_{d_1}), \ldots, Q_n(y_d, r_{d_n})\right) \to \max_{y_d, r_d} \\
\sum_i r_{d_i} &\leq r_0
\end{aligned}
$$

warstwa dolna

$$
\begin{aligned}
Q_i(u_i, x_i) &\to \max_{u_i} \\
x_i &= H_i y_d, \qquad (u_i, x_i) \in C_i, \qquad r_i \leq r_{d_i}
\end{aligned}
$$

problem: dla pewnych (y_d, r_d), zadanie dolnego poziomu może nie mieć rozwiązania

$$(y_d, r_d) \in YR$$

zbiór YR – tudny do wyznaczenia (zależy od ograniczeń i struktury systemu)

Procedury koordynacji
Metoda kar

warstwa górna

$$\overline{Q} = \psi\left(\overline{Q}_1(y_d, r_{d_1}), \ldots, \overline{Q}_n(y_d, r_{d_n})\right) \longrightarrow \max_{y_d, r_d}$$

warstwa dolna

$$\overline{Q}_i = Q_i(u_i, x_i) - K(y_i - y_{d_i}) \longrightarrow \max_{u_i}$$

Procedury koordynacji
Metoda cen

warstwa górna

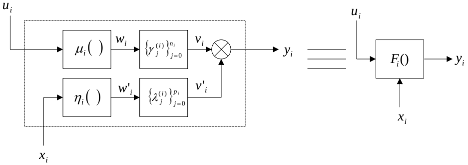
$$\phi(\lambda) = \sum_i Q_i\left(u_i(\lambda), x_i(\lambda)\right) + \langle \lambda, x(\lambda) - Hy(\lambda)\rangle \to \min_{\lambda}$$

warstwa dolna

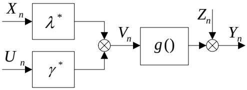
$$\widetilde{Q} = Q_i(u_i, x_i) + \langle \lambda_i, u_i\rangle - \langle \mu_i, y_i\rangle \to \min_{u_i}$$

Uogólnienia

Systemy nieliniowe



Blok typu Hammersteina



Blok typu Wienera

Literatura

[1] Findeisen, W., Bailey, F.N., Brdyś, M., Malinowski, K., Tatjewski, P.,Woźniak, A.: *Control and Coordination in Hierarchical Systems*. J. Wiley, Chichester (1980)

[2] Findeisen, W., *Wielopoziomowe układy sterowania*, PWN, Warszawa (1974)

Złożone systemy sterowania
Optymalizacja dwupoziomowa z dokompozycją i koordynacją

Grzegorz Mzyk

Politechnika Wrocławska, Wydział Elektroniki

January 10, 2017

Zadania związane

- zadanie pierwotne

znaleźć $\widehat{u} \in U$:

$$Q(\widehat{u}) \geq Q(u) \tag{1}$$

dla każdego $u \in U$, gdzie U jest zbiorem wartości dopuszczalnych
u – wektor zmiennych decyzyjnych (sterowań)

- zadanie związane (ozn.)
  znaleźć $\widehat{w} \in W$:

$$P(\widehat{w}) \geq P(w) \tag{2}$$

  dla kazdego $w \in W$

Zadania związane

Użycie rozwiązania zadania (2) do okreslenia rozwiązania zadania (1) jest możliwe gdy:

- rozwiązanie $\widehat{w}$ zadania (2) istnieje $\Leftrightarrow$ istnieje rozwiązanie $\widehat{u}$ zadania (1)
- istnieje odwzorowanie $\varphi : W \to U$, takie że $\widehat{u} = \varphi(\widehat{w})$

Zbiory douszczalne

$$U = \{u : g'(u) \leq 0, g''(u) = 0\}$$

$$W = \{w : h'(w) \leq 0, h''(w) = 0\}$$

Twierdzenie

Jeżeli

$$h' = g' \circ \varphi \qquad h'' = g'' \circ \varphi \qquad P = Q \circ \varphi$$

to zadanie (2) jest związane z zadaniem (1) oraz $\widehat{u} = \varphi(\widehat{w})$.

Dekompozycja

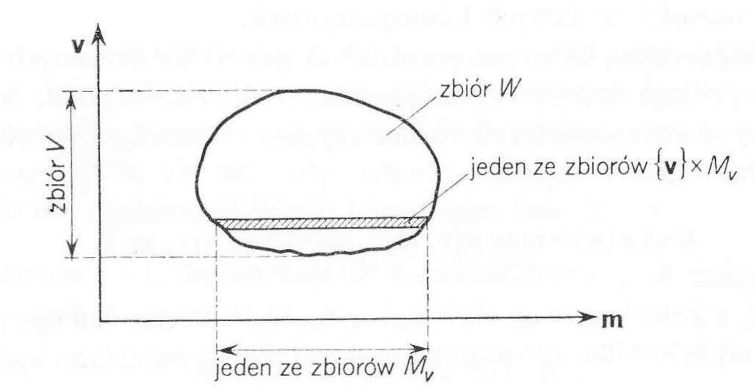
$$P(w) \to \max_{w} \qquad w = (v, m)$$

$$\max_{w} P(w) = \max_{v,m} P(v, m) = \max_{v} \left[\max_{m} P(v, m) \right]$$

optymalizacja w [] odbywa się przy ustalonym v (zadanym z góry)
v - zmienne decyzyjne górnego poziomu, tzw. *zmienne koordynujace*
odpowiedni dobór zm. v – tzw. *koordynacja*
Na poziomie dolnym staramy się dokonać dekompozycji

$$m = (m_1, m_2, ..., m_n)$$

i rozwiązywać zadania częściowe równolegle.

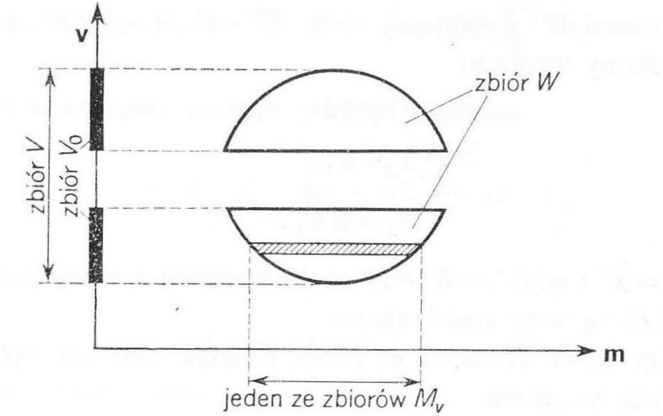


Zbiór dopuszczalny

Zadanie dolnego poziomu

dla danego $v \in V$ znaleźć $\widehat{m}(v) \in M_v$ takie że dla każdego $m \in M_v$ zachodzi

$$P(v, \widehat{m}(v)) \geq P(v, m)$$



Zbiór dopuszczalny

Zadanie górnego poziomu

znaleźć $\widehat{v} \in V_0$ takie że dla każdego $v \in V_0$ zachodzi

$$P(\widehat{v}, \widehat{m}(\widehat{v})) \geq P(v, \widehat{m}(v))$$

Przykład

zminimalizować funkcję

$$Q(u) = (u_1 - 4)^2 + (u_2 - 4)^2 \to \min_u$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} g_1(u) &= u_1^2 + u_2^2 - \alpha^2 e^{2u_3} \leq 0 \\ g_2(u) &= |u_3| - 1 \leq 0 \\ |\alpha| &\leq 1 \end{aligned}$$

konstrukcja zadania związanego
funkcja φ

$$\begin{aligned} u_1 &= w_2 \\ u_2 &= w3 \\ u_3 &= \ln w_1 \end{aligned}$$

złożenie $P = Q \circ \varphi$

$$P(w) = (w_2 - 4)^2 + (w_3 - 4)^2$$

ograniczenia

$$\begin{aligned} h_1(w) &= w_2^2 + w_3^2 - \alpha^2 w_1^2 \leq 0 \\ h_2(w) &= |\ln w_1| - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

rozbicie problemu na dwa poziomy

$$v = w_1 \qquad m_1 = w_2 \qquad m_2 = w_3$$

zbiory dopuszczalne

$$\begin{aligned} V &= \left\{ v : \frac{1}{e} \leq v \leq e \right\} \\ M_v &= \left\{ m : m_1^2 + m_2^2 \leq \alpha^2 v^2 \right\} \end{aligned}$$

zadanie dolnego poziomu

$$P(v, m_1, m_2) = (m_1 - 4)^2 + (m_2 - 4)^2 \rightarrow \min_{m_1, m_2}$$

przy ograniczeniu

$$m_1^2 + m_2^2 \leq \alpha^2 v^2$$

rozwiązanie

$$\widehat{m}_1(v) = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha v \qquad \widehat{m}_2(v) = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha v$$

zadanie górnego poziomu

$$\min_{v} P\left(v, \widehat{m}(v)\right) = \min_{v} 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha v - 4\right)^2$$

przy ograniczeniu

$$\frac{1}{e} \leq v \leq e$$

rozwiązanie

$$\widehat{v} = e$$

powrót do zadania pierwotnego

$$
\begin{aligned}
\widehat{u} &= \varphi\left(\widehat{w}\right) \\
u_1 &= \widehat{m}_1\left(\widehat{v}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha e \\
u_2 &= \widehat{m}_2\left(\widehat{v}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha e \\
u_3 &= \ln \widehat{v} = 1
\end{aligned}
$$

Literatura

[1] Findeisen, W., Bailey, F.N., Brdyś, M., Malinowski, K., Tatjewski, P.,Woźniak, A.: *Control and Coordination in Hierarchical Systems*. J. Wiley, Chichester (1980)

[2] Findeisen, W., *Wielopoziomowe układy sterowania*, PWN, Warszawa (1974)

Podstawy teorii decyzji

1. Podstawowe pojęcia

Parametr generowany przez przyrodę – θ (np. wielkość jutrzejszych opadów deszczu, wynik losowania itp.)

Znana funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f(\theta)$

Musimy podjąć decyzję d co to wartości, jaką uzyska θ.

Funkcja strat (*ang. loss function*) – określa, jaki koszt poniesiemy, gdy podejmiemy decyzję d, a prawdziwy parametr będzie miał wartość θ. Przykłady takich funkcji:

$$\begin{aligned} L(d,\theta) &= |d-\theta| \\ L(d,\theta) &= (d-\theta)^2 \\ L(d,\theta) &= -\delta\,(d-\theta) \end{aligned}$$

Ryzyko (*ang. risk*) – wartość oczekiwana funkcji strat

$$R(d) = EL(d,\theta) = \int L(d,\theta)f(\theta)d\theta$$

2. Kwadratowa funkcja strat

$$\begin{aligned} R(d) &= EL(d,\theta) = E\,(d-\theta)^2 = E(d^2 - 2d\theta + \theta^2) = \\ &= d^2 - 2dE\theta + E\theta^2 \\ \frac{\partial R(d)}{\partial d} &= 2d - 2E\theta, \text{ zatem } \frac{\partial R(d)}{\partial d} = 0 \text{ dla } d = E\theta \end{aligned}$$

$d^* = E\theta$ **optymalną decyzją jest wartość oczekiwana parametru** θ

3. Funkcja strat typu moduł

oznaczmy $F(\theta) = \int_{-\infty}^{\theta} f(\theta)d\theta$

$$
\begin{aligned}
R(d) &= EL(d,\theta) = E\left|d-\theta\right| = \int_{-\infty}^{d}(d-\theta)f(\theta)d\theta - \int_{d}^{\infty}(d-\theta)f(\theta)d\theta = \\
&= d\left[\int_{-\infty}^{d} f(\theta)d\theta - \int_{d}^{\infty} f(\theta)d\theta\right] - \left[\int_{-\infty}^{d} \theta f(\theta)d\theta - \int_{d}^{\infty} \theta f(\theta)d\theta\right]
\end{aligned}
$$

różniczkujemy po d

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R(d)}{\partial d} &= 1\cdot[F(d)-(1-F(d))] + d[f(d)+f(d)] - [df(d)-(-df(d))] = \\
&= 2F(d)-1\textbf{, zatem decyzja jest optymalna gdy } F(d) = \frac{1}{2} \textbf{ (mediana)}
\end{aligned}
$$

korzystaliśmy z definicji pochodnej

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{d}\theta f(\theta)d\theta\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{-\infty}^{d+h}\theta f(\theta)d\theta - \int_{-\infty}^{d}\theta f(\theta)d\theta}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_{d}^{d+h}\theta f(\theta)d\theta}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{hdf(d)}{h} = df(d)
\end{aligned}
$$

4. Funkcja strat typu delta

$$
\begin{aligned}
R(d) &= EL(d,\theta) = -E\delta\left(d-\theta\right) = -\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(d-\theta\right)f(\theta)d\theta = f(d) \\
f(d) &\to \max_{d}
\end{aligned}
$$

najlepszą decyzją jest parametr najbardziej prawdopodobny

5. Przykładowa gra

Podajemy liczbę d, automat losuje liczbę θ z następującego rozkładu

$$\theta = \begin{cases} 0, \text{ z prawdopodobieństwem } \frac{1}{3} \\ 1, \text{ z prawdopodobieństwem } \frac{1}{3} \\ 5, \text{ z prawdopodobieństwem } \frac{1}{3} \end{cases}$$

Gra 1) gdy musimy zapłacić $|d - \theta|$ złotych
najlepszą decyzją (minimalizującą ryzyko) jest mediana zmiennej θ, czyli $d^* = 1$, wtedy

$$R(d^*) = E\,|d - \theta| = 1\text{zł} \cdot \frac{1}{3} + 0\text{zł} \cdot \frac{1}{3} + 4\text{zł} \cdot \frac{1}{3} = \text{średnio } 1.66\text{zł (mniej nie można)}$$

Gra 2) musimy zapłacić $(d - \theta)^2$ złotych
teraz najlepszą decyzją (minimalizującą ryzyko) jest wartość oczekiwana zmiennej θ, czyli $d^* = 2$, wtedy

$$R(d^*) = E(d - \theta)^2 = 4\text{zł} \cdot \frac{1}{3} + 1\text{zł} \cdot \frac{1}{3} + 9\text{zł} \cdot \frac{1}{3} = \text{średnio } 4.66\text{zł (mniej nie można)}$$

Gra 3) jeśli trafimy – wygrywamy dom i samochód
należy podjąć decyzję $d = 0$, $d = 1$ lub $d = 5$, wszystkie zdarzenia $\theta = 0$, $\theta = 1$ i $\theta = 5$ są tak samo ("najbardziej") prawdopodobne, inne decyzje wykluczają szansę na wygraną

1 Sterowanie wielopoziomowe

- warstwa adaptacji – umożliwia uwzględnienie niestacjonarności procesu, tzn. zmiany jego parametrów z upływem czasu
- warstwa optymalizacji – generuje optymalny (technologicznie), żądany przebieg procesu $y_{\dot{z}}(t)$
- warstwa sterowania bezpośredniego – realizuje klasyczne zadanie regulacji zdefiniowane przez warstwy nadrzędne

Przykład: Samochód rajdowy, kierowca, pilot.

Pilot (warstwa optymalizacji) jako znawca trasy podaje prędkość z jaką należy wejść w zakręt, uwzględniając warunki pogodowe (adaptacja). Kierowca (sterowanie bezpośrednie) bezkrytycznie realizuje polecenia pilota (warstwa nadrzędna).

Problem sterowania został zdekomponowany (pilot nie musi posiadać prawa jazdy, kierowca nie musi znać trasy).

Pilot, jako warstwa nadrzędna, jest ważniejszy (błędna decyzja może spowodować wypadek).

[ew. rysunek]

2 Nadążność

Niech sygnał zadający będzie wielomianem stopnia r

$$y_{\dot{z}}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 ... + a_r t^r$$

Niech układ otwarty (stabilnego układu regulacji) ma h biegunów zerowych

$$K_{otw}(s) = \frac{L_{otw}(s)}{M_{otw}(s)} = \frac{L_{otw}(s)}{s^h N_{otw}(s)}$$

Wtedy

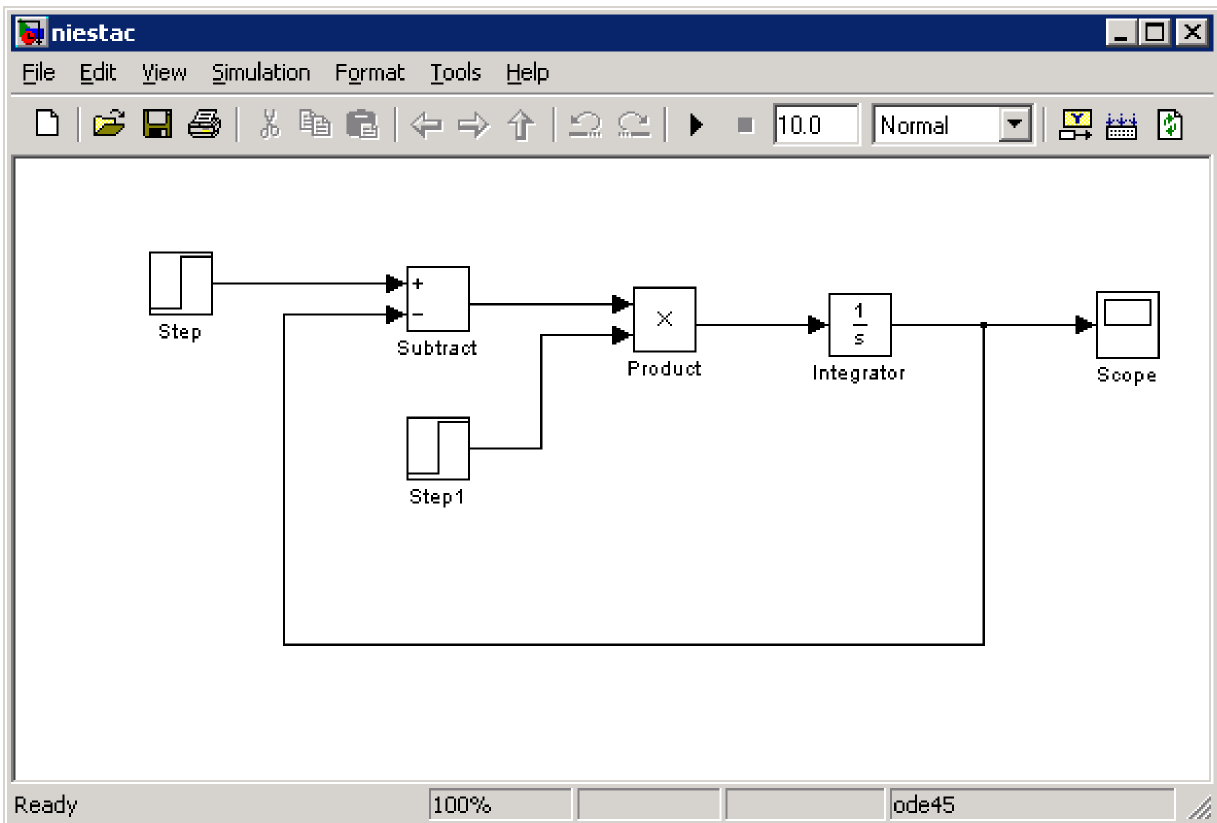
$$\begin{array}{ll} h > r & \varepsilon(t) \to 0 \\ h = r & \varepsilon(t) \to \varepsilon_{ust} \\ h < r & |\varepsilon(t)| \to \infty \end{array}$$

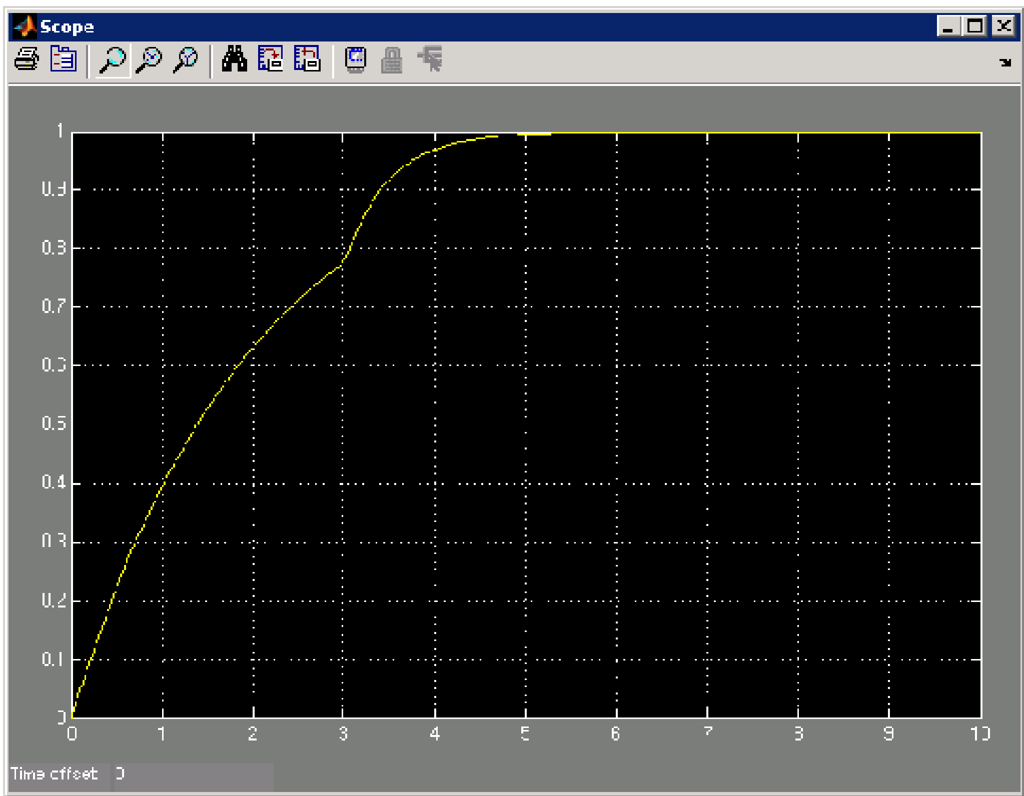
3 Obiekty niestacjonarne

ich parametry ulegają zmianie w czasie (np. temperatura silnika samochodu - pierwsze kilka minut po uruchomieniu, masa samolotu – spalanie paliwa, możliwości człowieka – wiek)

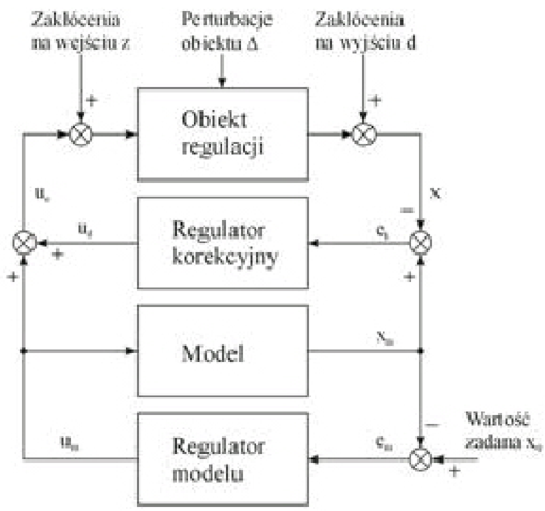
Przykład

$$K(s) = \frac{1}{Ts + 1}, \text{ gdzie } T \text{ zmienia się w czasie}$$

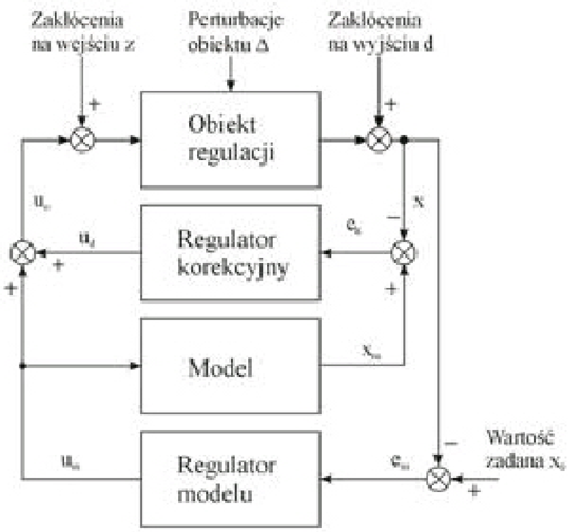

niestac
File Edit View Simulation Format Tools Help
10.0
Normal
Step
Subtract
Product
Integrator
Scope
Step1
1
s
Ready
100%
ode45


Scope
Time offset: 0

4 Odporność



Struktura typu MFC (*ang. Model Following Control*) [źródło: http://www.bitermo.com.pl/art/art1.php]
MFC/IMC


Zakłócenia
na wejściu z
Perturbacje
obiektu Δ
Zakłócenia
na wyjściu d
Obiekt
regulacji
Regulator
korekcyjny
Model
Regulator
modelu
Wartość
zadana

1 Jądrowy sposób konstruowania regulatora nieliniowego, tablice sterowań (look-up tables)

Wiedza uzyskana od ekspertów:

Gdy uchyb jest równy ε_1 *to sterowanie powinno być* u_1.

Gdy uchyb jest równy ε_2 *to sterowanie powinno być* u_2.

.

.

.

Gdy uchyb jest równy ε_N *to sterowanie powinno być* u_N.

Wiedza wstępna – zbiór N par:

$$\{(\varepsilon_k, u_k)\}_{k=1}^{N}$$

Chodzi o skonstruowanie funkcji $u = f(\varepsilon)$, która możliwie dobrze przybliża to, co powiedzieli eksperci.

2 Estymator jądrowy

$$\widehat{f}(\varepsilon) = \frac{\sum_{k=1}^{N} u_k K(\frac{\varepsilon-\varepsilon_k}{h(N)})}{\sum_{k=1}^{N} K(\frac{\varepsilon-\varepsilon_k}{h(N)})}$$

$K()$ – funkcja jądra, o dużych wartościach w pobliżu zera, tzn. selekcjonująca punkty ε_k bliskie argumentowi ε.

$h(N)$ – parametr strojenia (wygładzania), taki że $h(N) \to 0$ i $Nh(N) \to \infty$, gdy $Nh(N) \to \infty$

Uwaga: nie zakładamy, znajomości postaci (wzoru) funkcji $f()$.

3 Metoda postępowania

etap 1) akwizycja danych (słuchamy ekspertów)

etap 2) obliczamy $\widehat{f}(\varepsilon)$ w kilku różnych punktach ε (kilku, lub więcej w zależności od zastosowań)

etap 3) interpolujemy ("łączymy" uzyskane punkty)

4 Wersja dwuwymiarowa

oprócz uchybu ε dysponujemy jego pochodną $\varepsilon^{'}$:

Gdy uchyb ma wartość ε_1, *a jego pochodna* $\varepsilon_1^{'}$ *to sterowanie powinno być* u_1.

itd.

.

.

$$\widehat{f}(\varepsilon,\varepsilon^{'}) = \frac{\sum_{k=1}^{N} u_k K\left(\frac{\left\|\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\varepsilon_k\\ \varepsilon_k^{'}\end{bmatrix}\right\|}{h(N)}\right)}{\sum_{k=1}^{N} K\left(\frac{\left\|\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^{'}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\varepsilon_k\\ \varepsilon_k^{'}\end{bmatrix}\right\|}{h(N)}\right)}$$

gdzie $\|\|$ – norma wektora (ep. euklidesowa)

Uwaga: Dla przypadku dwuwymiarowego musi zachodzić warunek $Nh^2(N) \rightarrow \infty$.

Przybliżona analiza układów nieliniowych

December 13, 2011

0.1 Specyfika układów nieliniowych

Nieliniowe równanie różniczkowe

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, .., y, x^{(m-1)}, ..., x, t) = 0.$$

Układ nieliniowy pobudzony sygnałem sinusoidalnym $\sin \omega t$, w przeciwieństwie do układu liniowego, daje na wyjściu dodatkowe składowe harmoniczne o innych (wyższych) pulsacjach niż pulsacja podstawowa ω.

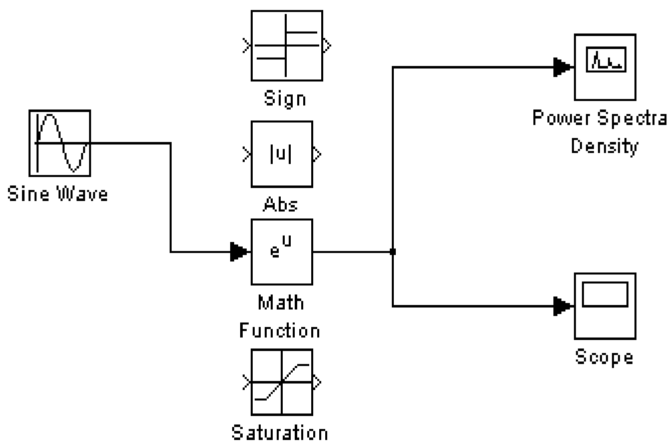


FIGURE 1. Obserwacja widm procesów wyjściowych elementów nieliniowych

Nie ma zastosowania transformacja Laplace'a

Bardziej złożone struktury połączeń (np. z dodatnim sprzężeniem zwrotnym) mogą prowadzić do niejednoznacznej charakterystyki zastępczej (tzw. histerezy)

Przykład praktyczny.

$$u = \begin{cases} 1 \text{ (zawór otwarty), gdy } y(t) < y_0(t) \text{ (jest za zimno);} \\ 0 \text{ (zawór zamknięty), gdy } y(t) \geq y_0(t) \text{ (jest wystarczająco ciepło).} \end{cases}$$

0.2 Metoda funkcji opisującej

Polega na przybliżeniu elementu nieliniowego jego opisem liniowym, a następnie zastosowaniu znanych narzędzi analizy systemów liniowych.

$$u(t) = A \sin \omega t$$

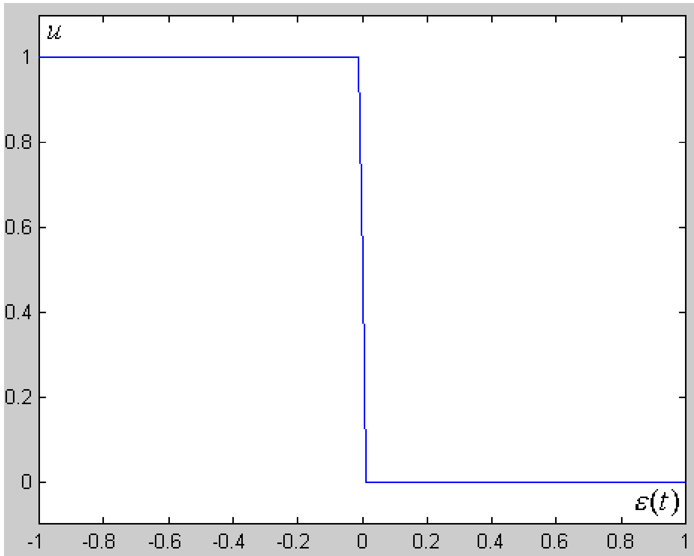


FIGURE 2. Charakterystyka statyczna termostatu

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (b_k \sin k\omega t + c_k \cos k\omega t),$$

a_0, b_k i c_k są stałymi współczynnikami, zależnym od charakterystyki nieliniowej i amplitudy A sygnału wejścioweg

$$y_1(t) = b_1 \sin \omega t + c_1 \cos \omega t \approx y(t)$$

„transmitancja” zwana funkcją opisującą

$$J(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{b_1 + jc_1}{A}.$$

przykłady [Wiszniewski 2000]

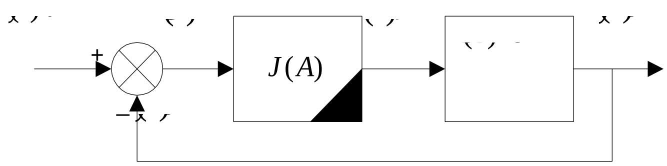


FIGURE 3. UAR z regulatorem nieliniowym

"Równanie charakterystyczne"

$$1 + J(A)K_O(j\omega) = 0,$$

TABLE 1. Funkcje opisujące popularnych elementów nieliniowych

Charakterystyka $f(x)$	Funkcja opisująca dla $x(t) = A \sin \omega t$
$f(x) = \max\{kx, B\}$	$J(A) = \frac{2k}{\pi}\left(\arcsin \frac{B}{Ak} + \frac{B}{Ak}\left(1 - \left(\frac{B}{Ak}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$
$f(x) = \begin{cases} B, \text{ dla } x \geqslant 0 \\ -B, \text{ dla } x < 0 \end{cases}$	$J(A) = \frac{4B}{\pi A}$
$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dla } \lvert x \rvert < a \\ B, \text{ dla } x \geqslant a \\ -B, \text{ dla } x < -a \end{cases}$	$J(A) = \frac{4B}{\pi A}\left(1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

cykl graniczny

$$K_O(j\omega) = -\frac{1}{J(A)}.$$

Krzywa na płaszczyźnie zespolonej o współrzędnych $(\mathrm{Re}[-\frac{1}{J(A)}], \mathrm{Im}[-\frac{1}{J(A)}])$ określa granicę między stabilnością i niestabilnością systemu (odpowiednik punktu $(-1, j0)$ w kryterium Nyquista).

Przykład [Wiszniewski, 2000]

Obiekt

$$K_O(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+1)}$$

regulator

$$u = B \cdot \mathrm{sgn}(\varepsilon).$$

Można pokazać, że

$$J(A) = \frac{4B}{\pi A}.$$

Rozwiązujemy

$$-\frac{1}{J(A)} = K_O(j\omega),$$

poprzez porównanie części rzeczywistych i urojonych jego obu stron i otrzymujemy

$$\omega = 1 \text{ i } A = \frac{2B}{\pi}.$$

W układzie powstaną więc drgania okresowe o amplitudzie $A = 2B/\pi$ i pulsacji $\omega = 1$.

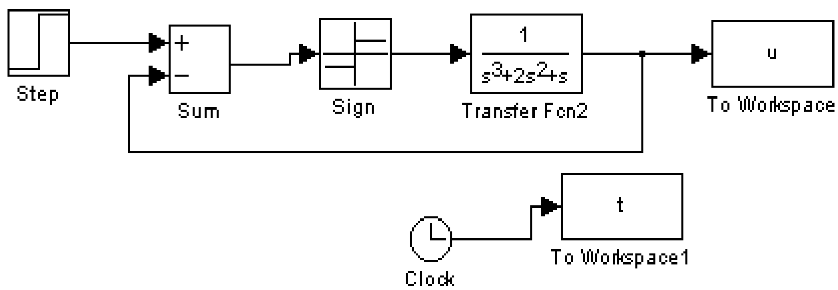


FIGURE 4. Układ z przekaźnikiem dwupołożeniowym

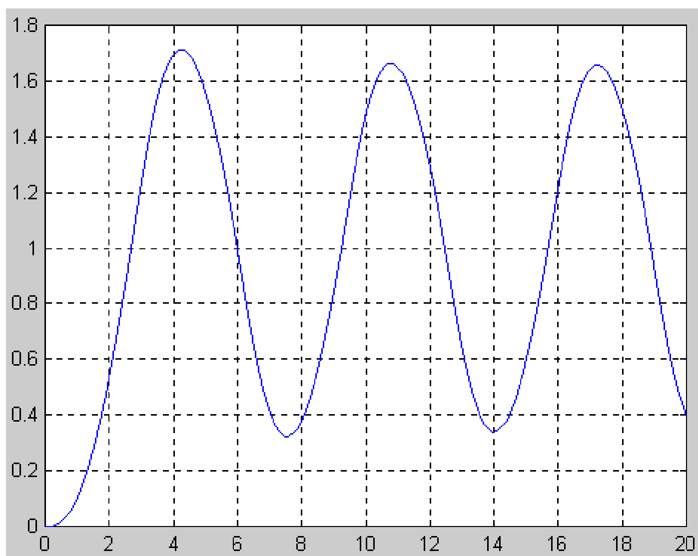


FIGURE 5. Przebieg wyjścia obiektu $y(t)$ (gdzie $A \approx 2/\pi$, $\omega \approx 1$)

0.3 Model systemu nieliniowego w postaci szeregu Volterry

$$
\begin{aligned}
y(t) \quad = \quad & h^{(0)} + \int_R h^{(1)}(\tau_1)x(t-\tau_1)d\tau_1 + \\
& + \int_R h^{(2)}(\tau_1,\tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \\
& + \int_R h^{(3)}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-\tau_3)d\tau_1 d\tau_2 d\tau_2 + ...
\end{aligned}
$$

0.4 Modele Hammersteina i Wienera

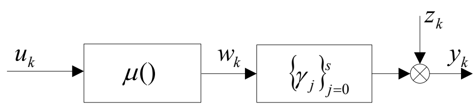


FIGURE 6. Hammerstein system

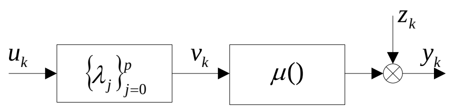


FIGURE 7. Wiener system